Universiteit Leiden
The Netherlands

Positive representations on ordered Banach spaces
Messerschmidt, H.J.M.

Citation
Messerschmidt, H. J. M. (2013, November 27). *Positive representations on ordered Banach spaces*. Retrieved from https://hdl.handle.net/1887/22523

Version: Corrected Publisher's Version
License: Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden
Downloaded from: https://hdl.handle.net/1887/22523

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page

Universiteit Leiden

Leiden University Repository

The handle http://hdl.handle.net/1887/22523 holds various files of this Leiden University dissertation

Author: Messerschmidt, Hendrik Jacobus Michiel
Title: Positive representations on ordered Banach spaces
Issue Date: 2013-11-27

Samenvatting

Veel dynamische systemen in de natuur voldoen aan een 'positiviteits-eis'. In de bevolkingsdynamica bijvoorbeeld hebben negatieve bevolkingen geen betekenis, en net zo zijn negatieve waarden van het concentratieprofiel van materiaal dat diffundeert in een vloeistof niet zinvol. De beschrijving van zulke systemen in wiskundige taal levert vaak vectorruimten op met een (pre)ordening die gedefinieerd wordt door een kegel van positieve elementen. De dynamica van een dergelijk systeem wordt dan gegeven door een groeps– of semigroepsactie op deze vectorruimte die de kegel invariant laat. Vaak is er bij een natuurlijk systeem een symmetriegroep van de onderliggende ruimte (denk aan rotaties van het aardoppervlak) die op een voor de hand liggende manier op een dergelijke vectorruimte werkt, en dan eveneens de kegel invariant laat. Positieve groepsacties komen vaak voor.

Met dit in gedachten, en ook gemotiveerd vanuit de theorie van unitaire representaties van groepen en representaties van C^*-algebra's op Hilbertruimten, is dit proefschrift is een bijdrage aan de theorie van positieve groeps– en algebrarepresentaties op geordende Banachruimten, en meer algemeen van positieve representaties op Banachruimten met een preordening.

Gemotiveerd door onder andere de quantummechanica is er sinds de eerste decennia van de twintigste eeuw veel onderzoek gedaan naar unitaire representaties van lokaal compacte groepen op Hilbertruimten. Voortbouwend op werk van onder andere Peter, Weyl en von Neumann is er onder meer een decompositietheorie voor unitaire representaties van dergelijke groepen op Hilbertruimten ontwikkeld, waarbij aangetoond wordt dat dergelijke representaties ontbonden kunnen worden als een directe som of, meer algemeen, een directe integraal van irreducibele unitaire representaties. Dit heeft tot gevolg dat het bestuderen van zulke unitaire representaties voor een deel gereduceerd kan worden tot het bestuderen van de irreducibele unitaire representaties.

Van belang in deze theorie is de zogeheten groeps C^*-algebra $C^*(G)$ van een lokaal compacte groep G. Deze C^*-algebra heeft de eigenschap dat er een natuurlijke bijectie bestaat tussen de niet ontaarde *-representaties van $C^*(G)$ op Hilbertruimten enerzijds, en de unitaire representaties van G op Hilbertruimten anderzijds. Op die manier kunnen vragen over unitaire representaties van een groep vertaald worden naar vragen over *-representaties van een C^*-algebra. Omdat een C^*-algebra een functionaalanalytische structuur heeft en een groep niet, is dit een essentiële stap om een algemene decompositiestelling voor unitaire representaties van lokaal compacte groepen te kunnen bewijzen.

Met dit en de natuurlijke rol van niet-Hilbertrepresentaties van groepen en algebra's in gedachten, hebben Dirksen, de Jeu en Wortel een begin gemaakt met de theorie van gekruiste producten van Banachalgebra's [19]. De groeps C^*-algebra $C^*(G)$, gebruikt voor ontbindingsstellingen, is een eenvoudig geval van een gekruist product van een C^*-algebra, maar de theorie van algemene gekruiste producten blijkt daarenboven een bevredigend conceptueel kader te bieden voor inductie van unitaire groepsrepresentaties. Omdat de verwachting en hoop is dat dit laatste ook voor niet-Hilbertrepresentaties van groepen het geval zal blijken te zijn, is de theorie van gekruiste producten buiten de context van C^*-algebra's eveneens in zijn algemeenheid opgepakt. In dit proefschrift ontwikkelen we deze theorie van algemene gekruiste producten verder en plaatsen deze ook in de context van positieve representaties van groepen en geordende Banachalgebra's op geordende Banachruimten, en meer algemeen van positieve representaties op Banachruimten met een preordening. Tijdens het onderzoek trad een aantal fundamentele vragen over Banachruimten met een preordening naar voren, die op zichzelf al interessant zijn. Hieronder beschrijven we daarom ook deze fundamentele vragen in samenhang met de theorie van gekruiste producten van Banachalgebra's.

In Hoofdstuk 2 bekijken we de volgende vraag. Laat Ω een compacte Hausdorff ruimte zijn en X een Banachruimte met een preordening, zodanig dat de positieve kegel X_+ een gesloten voortbrengende kegel in X is. Is dan de kegel $C(\Omega, X_+)$ van alle continue X_+-waardige functies voortbrengend in de ruimte van alle continue X-waardige functies $C(\Omega, X)$? Het antwoord hierop is nodig in Hoofdstuk 5.

Als X een Banachrooster is, dan is deze vraag makkelijk te beantwoorden: omdat de roosterafbeeldingen continu zijn, lost de natuurlijke puntsgewijze decompositie in het rooster het problem onmiddellijk op. In het algemene geval is het antwoord niet zo duidelijk. Omdat de kegel X_+ voortbrengend is in X bestaan er, door gebruik te maken van het keuze axioma, functies $(\cdot)^\pm : X \to X_+$, zodanig dat $x = x^+ - x^-$ voor alle $x \in X$. Het probleem is dat deze functies $(\cdot)^\pm : X \to X_+$ nu niet automatisch continu zijn. Door een generalisatie van de Open Afbeeldingsstelling te combineren met de Michael Selectie Stelling kan echter worden aangetoond dat de functies $(\cdot)^\pm : X \to X_+$ toch altijd continu gekozen kunnen worden, zelfs ook nog positief homogeen en begrensd. Het antwoord op onze vraag over functies is daarmee bevestigend. In feite bewijzen we meer: als een Banachruimte voortgebracht wordt door (niet per se aftelbaar veel) gesloten kegels, dan kan de decompositie van een element van deze ruimte als convergente reeks met als termen elementen van de kegels op een continue, positief homogene en begrensde wijze gekozen worden. Het geval van een geordende Banachruimte is simpelweg de situatie waarin de Banachruimte de som is van twee kegels die een minteken schelen.

Veronderstel dat X en Y Banachroosters zijn. Een elementaire berekening laat zien dat $B(X, Y)$ absoluut monotoon is, d.w.z. dat de ongelijkheden $\pm T \leq S$, voor operatoren $T, S \in B(X,Y)$, impliceren dat $\|T\| \leq \|S\|$. Deze eigenschap is een zogeheten normaliteitseigenschap. Wanneer X en Y geen Banachroosters zijn, maar Banachruimten met een preordening gegeven door gesloten kegels, is de situatie alweer minder duidelijk. In Hoofdstuk 3 onderzoeken we de vraag naar nodige en voldoende eigenschappen van X en Y opdat $B(X,Y)$ een dergelijke normaliteitseigenschap heeft. Verder bekijken we ook of er überhaupt voorbeelden bestaan van Banachruimten X en Y met een preordening, die geen Banachroosters zijn, maar waarvoor $B(X,Y)$ toch absoluut monotoon is. Meer in het algemeen definiëren we in dit hoofdstuk een aantal mogelijke normaliteits en conormaliteitseigenschappen van Banachruimten X en Y met een preordening gegeven door gesloten kegels, en we laten zien dat een vorm van conormaliteit van X en normaliteit van Y nodig en voldoende zijn opdat $B(X,Y)$ een normaliteitseigenschap heeft. Het hebben van een dergelijke eigenschap is, op zijn beurt, weer van belang voor de relatie tussen norm en preordening in het gekruiste product in Hoofdstuk 5.

We introduceren een klasse van Banachruimten met een preordening gegeven door een gesloten kegel die *quasi-roosters* heten. In het algemeen zijn dit geen Banachroosters. In de ruimte $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ $(n \geq 3)$ zijn er veel kegels die geen roosterkegels zijn; de Lorentzkegel $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2}\}$ is een bekend voorbeeld. Dit voorbeeld geeft een meetkundig intuïtief beeld van quasi-roosters en motiveert hun definitie, als volgt. In deze driedimensionale ruimte heeft elk paar elementen x en y oneindig veel bovengrenzen, maar er bestaat geen supremum van x en y. Wel bestaat er echter een unieke bovengrens u van x en y die de grootheid $\|x-u\|_2 + \|y-u\|_2$ minimaliseert als functie op de verzameling van bovengrenzen. Dit element $x \tilde{\vee} y := u$ noemen we het *quasi-supremum* van x en y. In het algemeen noemen we een Banachruimte met een preordening, gegeven door een gesloten voortbrengende kegel, een *quasi-rooster* als elk paar elementen een quasi-supremum heeft, d.w.z. wanneer er een unieke bovengrens (of: een unieke minimale bovengrens) is waar de afstandssom een minimum aanneemt op de verzameling van bovengrenzen (of: minimale bovengrenzen). We laten zien dat elke strikt convexe reflexieve Banachruimte X met gesloten voortbrengende kegel X_+, zodanig dat $X_+ \cap (-X_+) = \{0\}$, een quasi-rooster is. Verder blijkt, enigszins verrassend, dat veel van de elementaire identiteiten voor vectorroosters directe analoga hebben voor quasi-roosters. Tenslotte tonen we aan dat niet noodzakelijkerwijs separabele Hilbertruimten H_1 en H_2, geordend door Lorentzkegels, quasi-roosters zijn, zodanig dat $B(H_1, H_2)$ absoluut monotoon is, terwijl H_1 en H_2 toch geen Banachroosters zijn als hun dimensie 3 of hoger is. Zodoende wordt de hierboven gestelde vraag over het bestaan van absoluut monotone ruimten van operatoren positief beantwoord.

Na deze (vanuit de primaire vragen gezien voorbereidende) eerste twee hoofdstukken, komen we in de Hoofdstukken 4 en 5 tot de gekruiste producten van Banachalgebra's en van Banachalgebra's met een preordening.

In [19] werd het gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ gedefinieerd, uitgaande van een gegeven Banachalgebra dynamisch systeem (A, G, α) en een uniform begrensde klasse $\mathcal{R}$ van niet ontaarde continue covariante representaties van het dynamische systeem op Banachruimten. Onder de milde aanname dat A een begrensde linksapproximatie van de identiteit heeft, werd daar aangetoond dat er een natuurlijke bijectie bestaat tussen de niet ontaarde $\mathcal{R}$-continue covariante representaties van het dynamische systeem (A, G, α) op Banachruimten enerzijds, en de niet ontaarde begrensde representaties van de Banachalgebra $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ anderzijds. In Hoofdstuk 4, laten we onder andere zien dat (onder milde voorwaarden) deze Banachalgebra $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ de unieke Banachalgebra is waarvoor er een dergelijke bijectie bestaat. We introduceren verder, gegeven een Banachalgebra dynamisch systeem (A, G, α) en een gewicht op G, in dit hoofdstuk ook gegeneraliseerde Beurlingalgebra's. Dit zijn algebra's van (equivalentieklassen van) A-waardige functies op G. Door een specifieke keuze voor de klasse $\mathcal{R}$ laten we zien dat deze gegeneraliseerde Beurling algebra's topologisch isomorf (en soms zelfs isometrisch isomorf) met gekruiste producten zijn. Daardoor kunnen we de representaties van gegeneraliseerde Beurling algebra's beschrijven in termen van de niet ontaarde continue covariante representaties van het Banachalgebra dynamische systeem (A, G, α). Wanneer de Banachalgebra A in het Banachalgebra dynamische systeem gelijk is aan het grondlichaam reduceren deze gegeneraliseerde Beurling algebra's tot klassieke Beurlingalgebra's, waarvan $L^1(G)$ het eenvoudigste geval is. We hervinden dan de klassieke beschrijving van de representaties van deze algebra's als speciaal geval van onze resultaten. Dit laat zien dat de algemene theorie van gekruiste producten van Banach algebra's niet alleen die van C^*-algebra's als speciaal geval omvat (zie [19]), maar ook de representaties van klassieke klassen Banach algebra's beschrijft als een eenvoudig speciaal geval.

In Hoofdstuk 5 komen de voorgaande hoofdstukken samen en ontwikkelen we de theorie van gekruiste producten van Banachalgebra's in een geordende context. Gegeven een Banachalgebra dynamisch system (A, G, α) met een preordening (d.w.z. dat A een Banachalgebra met een preordening is en G als orde-automorfismen op A werkt) en een uniform begrensde klasse $\mathcal{R}$ van niet ontaarde continue covariante representaties van het dynamische systeem op Banachruimten, laten we zien dat het gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ op een natuurlijke manier een Banachalgebra met een preordening is. Wanneer A een positieve begrensde linksapproximatie van de identiteit heeft, bestaat er een natuurlijke bijectie tussen de positieve niet ontaarde $\mathcal{R}$-continue covariante representaties van het dynamische systeem (A, G, α) op Banachruimten met een preordening gegeven door een gesloten kegel enerzijds, en de positieve niet ontaarde begrensde representaties van het Banachalgebra gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ op dergelijke ruimten anderzijds. Als we nu aannemen dat alle covariante representaties in $\mathcal{R}$ *positieve* representaties op Banachruimten met een preordening zijn, dan is (onder milde voorwaarden) het gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ de unieke Banachalgebra met een preordening waarvoor een dergelijke bijectie bestaat.

Voor de ordestruktuur van het gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ maken we gebruik van de resultaten uit de Hoofdstukken 2 en 3. De kegel $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}_+$ van het gekruiste product is (topologisch) voortbrengend wanneer de kegel $C_c(G, A_+)$ van A_+-waardige functies op G voortbrengend is in de ruimte $C_c(G, A)$ van A-waardige compact gedragen continue functies op G, en uit Hoofdstuk 2 weten we dat dit het geval is als A_+gesloten en voortbrengend in A is. Verder wordt de normaliteit van het gekruiste product $(A \rtimes_\alpha G)^{\mathcal{R}}$ bepaald door de normaliteit van alle operatorenalgebra's $B(X)$ van de Banachruimten X met een preordening waar de covariante representaties van $\mathcal{R}$ op werken. Hierdoor is de koppeling gelegd met het onderzoek in Hoofdstuk 3.

Als toepassing bestuderen we gegeneraliseerde Beurling algebra's gedefinieerd uitgaande van een Banachalgebra dynamisch systeem (A, G, α) met een preordening en een gewicht op G. Deze algebra's hebben een natuurlijke preordening. Wederom gebruikmakend van een specifieke keuze voor $\mathcal{R}$ gebruiken we de ontwikkelde theorie om de positieve niet ontaarde continue representaties van deze gegeneraliseerde Beurling algebra's te beschrijven in termen van de positieve niet ontaarde continue covariante representaties van (A, G, α). Wanneer $A = \mathbb{R}$ reduceren deze gegeneraliseerde Beurling algebra's tot klassieke reële Beurlingalgebra's (waaronder $L^1(G)$) met de natuurlijke ordening, en specialiseren onze uitspraken over hun positieve representaties tot resultaten die ook eenvoudig zijn af te leiden uit de klassieke resultaten over hun representaties in algemene Banachruimten.