



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Chaotic Dynamics in N-body systems

Boekholt, T.C.N.

Citation

Boekholt, T. C. N. (2015, November 10). *Chaotic Dynamics in N-body systems*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/36077>

Version: Not Applicable (or Unknown)

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/36077>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/36077> holds various files of this Leiden University dissertation

Author: Boekholt, Tjarda

Title: Chaotic dynamics in N-body systems

Issue Date: 2015-11-10

Nederlandse Samenvatting

"Ik denk vaak dat de nacht levendiger en kleurrijker is dan de dag."

– Vincent van Gogh

DYNAMISCHE SYSTEMEN

In het heelal is een oneindig aantal voorbeelden van dynamische systemen aanwezig. Elk systeem dat bestaat uit een verzameling van objecten, ook wel lichamen genoemd, die bewegen door ruimte en tijd onder de invloed van hun onderlinge krachten, is een geldige kandidaat.

Ons zonnestelsel is een bekend voorbeeld bestaande uit verschillende soorten lichamen. We hebben de zon in het midden (Copernicus, 1543), de planeten in ellipsbanen rond de zon (Kepler, 1609), manen in banen rond de planeten (Galilei, 1610), en dan zijn er nog zeer veel relatief kleine lichamen, zoals asteroïden en kometen (Halley, 1705) (zie Fig. 1.1, bovenste paneel).

Deze hemellichamen hebben allemaal één ding gemeen, ze hebben allen massa. Sinds het baanbrekende werk van Newton (1687), weten we dat lichamen met massa elkaar aantrekken. Elk object voelt de aantrekkingskracht van alle andere objecten. Het gevolg is dat ons zonnestelsel niet statisch is, maar evolueert, omdat alle lichamen bewegen. Als alle lichamen bewegen, dan is het ook mogelijk dat twee van hen rakelings langs elkaar heen scheren, zoals komeet Halley en de aarde in 1910.

Een ander voorbeeld van een dynamisch systeem is een cluster van sterren, ook wel een bolhoop genoemd (zie Fig. 1.1, onderste paneel). Het merendeel van de lichamen in zo'n systeem is een gewone ster, maar vaak komen er ook exotische objecten in voor, zoals neutronensterren en zwarte gaten. Een bolhoop is anders dan ons zonnestelsel, omdat er nu niet één dominante massa aanwezig is (de zon is duizend keer zwaarder dan alle planeten in ons zonnestelsel bij elkaar), maar alle massa's zijn nu gelijkwaardig. Dit zorgt voor een andere dynamica en evolutie van het systeem als geheel.

Het aantal sterren varieert per bolhoop, van enkele tientallen tot miljoenen. Het aantal is belangrijk omdat het invloed heeft op de

banen van de sterren. Stel dat onze zon zich in een cluster van sterren bevindt (men denkt dat dit zo was toen de zon nog jong was (Martínez-Barbosa et al., 2015; Jílková et al., 2015)), en er is alleen maar een handjevol andere sterren aanwezig, dan is de aantrekkingskracht van elke ster op de zon een significante fractie van het totaal. Als er echter een miljoen andere sterren aanwezig zijn, is elke individuele contributie nietig. Het gevolg is dat de baan van de zon bepaald wordt door alle sterren als geheel, waardoor de baan gladder is en op een langere tijdschaal verandert. Deze tijdschaal wordt ook wel de relaxatietijd genoemd (Chandrasekhar, 1942) en geeft de typische tijdschaal voor een bolhoop om zijn structuur te veranderen.

In de kernen van massieve bolhopen worden interacties tussen enkele sterren echter weer belangrijk. Vooral drie-lichamen interacties vormen een categorie op zich. Door de hoge dichtheid in massieve bolhopen, kunnen drie sterren zo dicht bij elkaar komen, dat ze voor een relatief korte tijd effectief geïsoleerd van de rest van het systeem zijn. Deze drie sterren wisselen energie uit en het kan gebeuren dat één van de drie sterren genoeg energie steelt van de andere twee sterren, zodat het genoeg bewegingsenergie heeft om uit de kern van het cluster te schieten. De overgebleven twee sterren hebben energie verloren en raken gebonden aan elkaar. Ze vormen samen een twee-lichamen systeem, oftewel een dubbelster (Szebehely, 1972). Deze dubbelster zal weer interacties aangaan met de andere nabije sterren, waarbij het bewegingsenergie weggeeft. Dit zorgt ervoor dat de structuur in de kern van de bolhoop verandert. Veel theoretische en numerieke studies zijn er gedaan van de precieze energie-uitwisseling tussen enkele en dubbelsterren in bolhopen (bijvoorbeeld Heggie, 1975; Hut & Bahcall, 1983; McMillan & Hut, 1996; Boekholt et al., 2015).

Planetaire systemen, bolhopen en drie-lichamen systemen zijn maar enkele voorbeelden van dynamische systemen in het heelal. Er zijn er nog veel meer, bijvoorbeeld sterrenstelsels die bestaan uit miljarden sterren, of kernen van sterrenstelsels die een supermassief zwart gat bevatten. Van al deze systemen zijn er enkele dingen die we graag zouden willen weten. Om precies te zijn, hoeveel en wat voor type lichamen zijn er aanwezig in het systeem, hoe zijn ze verdeeld in de ruimte, hoe verandert de globale structuur in de tijd en hoe zal het systeem tot zijn einde komen? Als een specifiek voorbeeld nemen we weer ons zonnestelsel, maar we beschouwen alleen de zon en de planeten. De massa's, posities en de snelheden zoals ze vandaag de dag zijn, zijn heel precies gemeten. Eén van de open vragen is hoe de banen van de planeten evolueren over een tijdschaal van miljarden jaren. Sommige studies laten zien dat het zonnestelsel altijd min of meer het-

zelfde zal blijven, oftewel het zonnestelsel is stabiel (Ito & Tanikawa, 2002). Andere studies concluderen dat het mogelijk is dat de banen significant kunnen veranderen, wat kan resulteren in botsingen tussen planeten (Laskar & Gastineau, 2009) of een planeet die het zonnestelsel uitgeschoten wordt (Laskar, 2008). Om de oorsprong en evolutie van dynamische systemen te onderzoeken, hebben we een wiskundig model nodig dat het gedrag van bewegende lichamen beschrijft.

HET N-LICHAMEN PROBLEEM

Newton (1687) definieerde een wiskundig model, genaamd het N-body (N-lichamen) probleem, dat het volgende beschrijft: stel we hebben een dynamisch systeem van N lichamen (met $N = 1, 2, 3, \dots$), met elk een massa, positie en snelheid. Wat zijn de posities en snelheden op elke tijd in de toekomst of in het verleden? Als de lichamen elkaar niet zouden voelen, dan zegt Newton's eerste wet dat ze zich blijven voortbewegen in rechte paden met een constante snelheid. Als de lichamen elkaar wel voelen, door de gravitationele aantrekkingskracht, dan worden de lichamen versneld en zullen dan gekromde paden afleggen. Dit gedrag is vastgelegd in Newton's tweede bewegingswet

$$F = ma, \tag{1}$$

met F de kracht, m de massa en a de acceleratie. Toen de appel Newton's hoofd raakte, realiseerde hij zich dat de attractieve kracht die actief is tussen alle lichamen in het heelal met massa, de gravitatiekracht is, ook wel zwaartekracht genoemd. Deze kracht is evenredig aan de massa's van de twee lichamen en omgekeerd evenredig aan het kwadraat van de afstand tussen de twee lichamen

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \tag{2}$$

In deze formule staat G voor de gravitationele constante, M en m voor de twee massa's en r voor de afstand. Om iets preciezer te zijn, de massa in vergelijking (1) is de inertiaal massa (massa is traag), terwijl de massa in vergelijking (2) de gravitatie massa is (massa is zwaar). Diverse experimenten hebben echter laten zien dat deze twee gelijk zijn tot op tenminste 13 plaatsen achter de komma (Poisson & Will, 2014). Daarom kunnen we vergelijking (1) en (2) samenvoegen en tegelijkertijd de som nemen over alle lichamen in het systeem

$$\vec{a}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}. \tag{3}$$

Hier staat $\vec{a}_i$ voor de totale acceleratie ervaren door lichaam i , als gevolg van alle andere lichamen met massa m_j op afstanden $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$. Voor elk object rekenen we de versnelling uit veroorzaakt door de aantrekking van elk ander object. De volgende stap is om deze versnelling te gebruiken om de posities en snelheden te berekenen op een bepaalde tijd in de toekomst. Dit is het lastigste gedeelte.

De versnelling als een functie van tijd is in het algemeen geen simpele functie, maar eerder complex en chaotisch. Behalve voor bepaalde configuraties met $N = 2$ (Newton, 1687) en $N = 3$ (Euler, 1767; Lagrange, 1772), kunnen we banen analytisch oplossen. Voor alle andere gevallen moeten we de versnelling stap voor stap meten. Deze discretisatie van het N-lichamen probleem introduceert een kleine fout in de oplossing, maar maakt het ideaal voor het gebruik van computers.

N-LICHAMEN SIMULATIES

Niet lang na de uitvinding van de computer, werden de eerste N-lichamen simulaties al uitgevoerd. Tussen de eersten om het N-lichamen probleem op te lossen op de computer waren von Hoerner (1960) en Aarseth (1963), met het doel om de banen van sterren te berekenen onder de invloed van hun onderlinge gravitatiekracht.

Het oplossen van een N-lichamen probleem op een computer bestaat uit twee elementen: een integratiemethode en een tijdstap-criterium. De integratie methode bepaalt hoe de nieuwe positie en snelheid worden berekend uit de huidige positie, snelheid en acceleratie. De simpelste integrator is de Euler methode:

$$r(t + \Delta t) = r(t) + v(t) \Delta t, \quad (4a)$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \Delta t. \quad (4b)$$

Hier staat t voor de huidige tijd, Δt voor de tijdstap grootte, r voor de positie en v voor de snelheid. Door iteratief de vergelijkingen (3) en (4) uit te voeren, kunnen we de banen van de lichamen berekenen en dus de evolutie van dynamische systemen bestuderen.

De Euler methode is heel simpel en duidelijk, maar niet echt precies. Als we het zouden beschouwen als een eerste orde Taylor-expansie, dan worden de hogere orde termen verwaarloosd, wat zorgt voor een afkappingsfout in de oplossing. Eén manier om dit type fout tegen te gaan, is door een goed tijdstap-criterium te kiezen. In principe moet de tijdstap zo klein mogelijk zijn, maar dit zal het aantal integratiestappen vermeerderen, wat weer tot gevolg heeft dat de CPU tijd stijgt.

Daarom is er een balans tussen de precisie en de snelheid. Er bestaan vele tijdstap-criteria in de literatuur, zoals

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{r_{ij}}{v_{ij}} \right\}, \quad (5)$$

$$\Delta t = \min \left\{ \sqrt{\frac{r_{ij}}{a_{ij}}} \right\}, \quad (6)$$

Het eerste criterium zorgt ervoor dat het dichtste paar van lichamen niet kan botsen binnen een enkele tijdstap, omdat de grootte van de tijdstap kleiner wordt naarmate lichamen dichterbij elkaar komen. Het tweede criterium is vergelijkbaar, maar werkt ook als alle snelheden nul zijn. Voor verdere details over integratoren, tijdstap-criteria, algoritmes en simulaties verwijs ik de lezer naar Aarseth (2003) en "The Art of Computational Science project" door Hut and Makino².

Als de software eenmaal geschreven is, moet het gerund worden op een bepaalde type hardware. Voor simulaties met een paar sterren is een desktop genoeg. De hoogste snelheid kan behaald worden door gebruik te maken van de snelste processors beschikbaar op de markt. Voor grotere dynamische systemen wordt het efficiënt om het N-lichamen probleem in parallel op te lossen. Zoals beschreven in de vorige sectie, als we de acceleratie van één lichaam willen bepalen, moeten we itereren over alle andere lichamen, en dit is een operatie van orde N . Echter, we willen de acceleraties van alle objecten weten, wat nog een factor N oplevert, resulterend in een hoeveelheid arbeid dat schaalts als N^2 . Dit werk verdelen over zoveel mogelijk CPU kernen kan leiden tot een significantie versnelling van de simulatie. Het is echter wel zo, dat met meer kernen er ook meer communicatie tussen de kernen aanwezig is, wat weer tot vertraging leidt. Ook hier is er weer een balans die gevonden moet worden (Portegies Zwart et al., 2008).

Omdat het N-lichamen probleem niet exact opgelost kan worden, is er veel tijd gestoken in het vinden van nieuwe, betere algoritmes. Zo zijn er methodes die specifiek ontwikkeld zijn voor een bepaald probleem. Er zijn codes die gaan voor snelheid, zodat ze grote dynamische systemen als sterrenstelsels aankunnen. Andere codes gaan meer voor precisie, bijvoorbeeld voor het berekenen van de banen van planeten. De zoektocht naar de ultieme N-lichamen methode die snel en precies is duurt voort.

²<http://www.artcompsci.org/>

CHAOTISCHE DYNAMICA

Een belangrijk concept in dit proefschrift is de groei van een kleine verstoring in het dynamische systeem. Deze verstoring zal in twee contexten behandeld worden. Ten eerste kan de kleine verstoring een numerieke fout zijn, bijvoorbeeld de afkappingsfout. Deze numerieke fout zal groeien door heel het systeem, waardoor de numerieke oplossing divergeert van de echte oplossing. Dit is een probleem dat te allen tijde in de gaten gehouden moet worden door gebruikers van N-lichamen simulaties. De tweede toepassing is wanneer de verstoring fysisch is. We meten hoe twee dichtbijzijnde oplossingen uit elkaar groeien in de tijd. Als dit heel lang duurt vergeleken met de tijdschaal van het probleem, dan is het dynamische systeem stabiel tegen kleine verstoringen. Als blijkt dat een kleine verstoring exponentieel groeit, dan is het systeem instabiel en zal de structuur van het systeem veranderen. Dit is te vergelijken met het voorspellen van het weer; het weer voor morgen kunnen we redelijk precies voorspellen, voor de dag erna is de onzekerheid al groter, en voor het einde van de week weten we het alleen heel globaal. Door het meten van de groei van een kleine verstoring in een dynamisch systeem, kunnen we iets leren over de stabiliteit van het systeem. Dit is belangrijk voor de dynamische interpretatie van waarnemingen die vaak maar een enkele snapshot van het systeem geven.

DIT PROEFSCHRIFT: CHAOTISCHE DYNAMICA IN N-LICHAMEN SYSTEMEN

Dit proefschrift bestaat uit vijf studies aangaande N-lichamen algoritmes, de betrouwbaarheid van N-lichamen statistiek en de oorsprong van chaos in dynamische systemen. Hieronder wordt kort beschreven wat de belangrijkste resultaten zijn.

In hoofdstuk 2 beschrijven we een nieuwe computercode voor het oplossen van het N-lichamen probleem. Deze code is de meest precieze code op aarde, maar ook de langzaamste. Het lost het N-lichamen probleem op met brute kracht en heet daarom Brutus. De reden voor deze hele precieze code is om te proberen het echte antwoord te vinden. Veel systemen laten chaotisch gedrag zien waardoor kleine verstoringen exponentieel toenemen, inclusief numerieke fouten. Op zich is tegen de groei zelf niets te doen, maar door een extreem hoge precisie te gebruiken kunnen we de numerieke fout zo klein maken, dat de verstoring binnen de integratietijd relatief klein blijft. Door de precisie dus

flink op te schroeven kunnen we de echte oplossing vinden en bepalen hoe accuraat conventionele, niet-precieze oplossingen zijn.

Hoofdstuk 3 gaat over een nieuwe N-lichamen code, genaamd Sakura, die voor snelheid gaat. De vraag die we hier stelden is of het N-lichamen probleem opgelost kan worden door alle twee-lichamen problemen in het systeem op te lossen. We kunnen immers een $N = 2$ probleem analytisch oplossen en het superpositie principe geldt voor het berekenen van de acceleraties. We laten zien dat dit inderdaad mogelijk is en leiden een tweede orde, niet-symplectisch algoritme af. Deze code is heel efficiënt op parallele computers door de verdeling van alle Kepler-problemen. Het is voor deze code dat we de Wim Nieuwpoort Award 2013 ontvingen van SURFSara te Amsterdam voor het efficiënte gebruik van hun supercomputer Cartesius.

In hoofdstuk 4 toetsen we de aanname dat resultaten van N-lichamen simulaties statistisch accuraat zijn, ofschoon individuele oplossingen besmet zijn met numerieke ruis. We doen een numeriek experiment waarbij we drie sterren nemen die elkaar gravitationeel beïnvloeden. Ze wisselen energie met elkaar uit, totdat één van de sterren genoeg bewegingsenergie heeft om te ontsnappen. We hebben dan een enkele ster die de ene richting op beweegt en een dubbelster in de tegenovergestelde richting. We maken een ensemble van initiële condities en integreren deze heel precies met Brutus, en ook met conventionele precisie. Daarna vergelijken we de statistiek van deze twee ensembles van oplossingen. We vinden dat, naargelang de totale energie tot op tenminste 10 procent is behouden, de globale statistiek behouden is onder divergentie van individuele oplossingen. Dit is goed nieuws voor de N-lichamen gemeenschap.

In hoofdstuk 5 gaan we wat dieper in op de gevolgen van de resultaten in het vorige hoofdstuk. Hoe komt het dat resultaten met numerieke ruis toch de globale statistische distributies behouden? Achter dit resultaat schuilt een fundamentele werking van de gravitatie die doet denken aan quasi-ergodiciteit. Een numerieke oplossing divergeert continu van het ene oplossingspad naar het andere, en dwaalt door (een groot deel van) de fase-ruimte. Het doet dit zodanig dat het ensemble heel de fase-ruimte bestrijkt en met de juiste frequentie zodat statistische distributies behouden blijven. Meer theoretisch werk is nodig om dit fenomeen beter te begrijpen.

We hebben laten zien in de voorgaande hoofdstukken dat chaotische systemen een exponentiële groei van kleine verstoringen laten zien. In hoofdstuk 6 willen we beter begrijpen waar deze groei vandaan komt, hoe relateert het zich tot het fysische systeem? Waarom zijn sommige systemen chaotisch en anderen ordelijk? We stellen een wiskundig

model op dat gebaseerd is op de groei van verstoringen in het twee-lichamen probleem dat weer verstoord wordt door een derde lichaam. We passen dit model toe op komeet Halley en vinden dat de chaos het gevolg is van sterke interacties met Jupiter en Venus. De groei neemt toe op een tijdschaal van ongeveer 300 jaar, zodat over 6000 jaar we niet meer kunnen voorspellen waar de komeet zich zal bevinden.

Het onderzoeksveld van N-lichamen codes en simulaties is volwassen geworden sinds de eerste simulaties in de jaren 1960. Er zijn echter nog veel onderwerpen die onderzocht moeten worden en veel onderwerpen die verbeteringen behoeven. Met de vele waarnemingsmissies gaande, zoals de Gaia en Kepler missies, hebben we behoefte aan codes die sneller en precieser zijn. Hiermee kunnen we het optimale uit de waarnemingen halen en zo meer leren over de werking van dynamische systemen in het heelal.