Periodic pulse solutions to slowly nonlinear reaction-diffusion systems

Rijk, B. de

Author: Rijk, B. de
Title: Periodic pulse solutions to slowly nonlinear reaction-diffusion systems
Issue Date: 2016-12-22

Nederlandse samenvatting

Periodieke pulsoplossingen in langzaam-niet-lineaire reactie-diffusiesystemen

In velerlei dynamische processen vindt patroonvorming plaats – denk aan de geleiding van zenuwimpulsen door een axon, het ontstaan van vlekken en strepen op dierenvacht of de ontwikkeling van vegetatiepatronen aan de rand van een woestijn. *Reactie-diffusiesystemen* zijn wellicht de simpelste partiële differentiaalvergelijkingen die zulke patroonvormende processen beschrijven. Alan Turing was de eerste die in 1952 liet zien dat patronen uit een uniforme toestand kunnen ontstaan in lineaire reactie-diffusiesystemen met twee componenten. Één van de componenten, de activator, bevordert de groei van beide componenten, terwijl de ander, de inhibitor, zorgt voor afremming. Turing toonde aan dat wanneer de inhibitor veel gemakkelijker diffundeert dan de activator er een terugkoppelingsmechanisme ontstaat wat patroonvorming stimuleert. In 1972 generaliseerde Gierer en Meinhardt dit resultaat naar niet-lineaire reactie-diffusiesystemen. Tegenwoordig worden niet-lineaire reactie-diffusiesystemen met meerdere componenten gebruikt als een paradigmatische klasse voor de bestudering van patroonvorming.

Het bovengenoemde verschil in diffusiesnelheden kan worden gemodelleerd door een (asymptotisch) kleine parameter ε in het systeem te introduceren. Over het algemeen is het uitermate lastig patronen in reactie-diffusievergelijkingen analytisch te beschrijven – helemaal wanneer de vergelijking meerdere componenten heeft. Echter, de kleine parameter induceert een tweedeling tussen langzaam en snel gedrag in het systeem. Door deze tweedeling uit te buiten, kunnen we de wiskundige analyse vergemakkelijken. Immers, door de limiet $\varepsilon \to 0$ in verschillende schalingen van het systeem te nemen ontstaan zogenaamde *gereduceerde, langzame en snelle systemen*. Deze gereduceerde systemen zijn lager-dimensionaal en daarom beter geschikt voor wiskundige analyse. Vaak is het voldoende deze gereduceerde systemen te begrijpen om het gedrag van patronen in het volledige reactie-diffusiesysteem te beschrijven.

Via reductiemethodes is er de afgelopen decennia veel vooruitgang geboekt in de analyse van patroonoplossingen in reactie-diffusiesystemen met een kleine parameter – en dan met name de stationaire en uniform-lopende patronen. Zo kan een dergelijk patroon geconstrueerd worden uit simpelere bouwstenen op de volgende manier. Eerst plakken we simpelweg oplossingen van gereduceerde, langzame en snelle systemen aan elkaar zodat er een gesloten baan ontstaat – zie Figuur 1.2. Hoewel deze baan geen oplossing is van het oorspronkelijke systeem, kan men via *geometrische singuliere-storingsrekening* aantonen dat er een echte oplossing bestaat in een omgeving van deze baan, onder de voorwaarde dat de parameter ε voldoende klein is. Gezien de oplossing ontstaat uit een samenvoeging van snelle en langzame onderdelen, bestaat zij uit sterk gelokaliseerde, spitse stukken en vlakke segmenten tussen de gelokaliseerde gedeeltes – zie bijvoorbeeld Figuur 1.

Vaak is men niet alleen geïnteresseerd in de gevonden patroonoplossing, maar tevens in het gedrag van dichtbij zijnde oplossingen van het reactie-diffusiesysteem. Immers, als oplossingen in de omgeving van het patroon divergeren met het verstrijken van de tijd, dan is het patroon instabiel onder kleine verstoringen. Zo'n patroon zal dus niet in de praktijk waargenomen worden, ook al is zijn existentie wiskundig bewezen. Om de *stabiliteit* van een patroonplossing te bepalen zijn we geïnteresseerd in de leidende orde dynamica in een omgeving van de oplossing, welke wordt verkregen door het reactie-diffusiesysteem rondom de oplossing te lineariseren – het lineaire gedrag zal namelijk voor kleine verstoringen dominant zijn. De gelineariseerde vergelijking is een evolutievergelijking van de vorm $u_t = \mathcal{L}u$, waarbij $\mathcal{L}$ een onbegrensde differentiaaloperator is, gedefinieerd op een geschikte functieruimte. Het *spectrum* van de verworven differentiaaloperator $\mathcal{L}$ is vaak bepalend voor stabiliteit, maar het is meestal zeer lastig de benodigde spectrale informatie te verkrijgen. Immers, het spectrum van $\mathcal{L}$ bestaat uit alle $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor het *eigenwaardeprobleem* $\mathcal{L}u = \lambda u$ inverteerbaar is. Dit eigenwaardeprobleem is weliswaar een lineaire, *gewone* differentiaalvergelijking, maar – zeker in het geval van meerdere componenten – is het nog steeds erg lastig zo'n niet-autonoom systeem op te lossen.

Desalniettemin kunnen we ook hier gebruik maken van de tweedeling tussen langzaam en snel gedrag in het systeem. Voor patroonoplossingen van verschillende specifieke reactie-diffusiesystemen is er via geometrische methodes aangetoond dat het eigenwaardeprobleem versimpelt in gereduceerde, langzame en snelle eigenwaardeproblemen. Deze versimpeling manifesteert zich via een complex-analytische, determinantfunctie: de *Evansfunctie*, wiens nulpunten overeenkomen met het spectrum van de differentiaaloperator $\mathcal{L}$. De kleine parameter induceert een expliciete *factorisatie* van de Evansfunctie in langzame en snelle componenten, die corresponderen met gereduceerde, langzame en snelle eigenwaardeproblemen. Deze factorisatie geeft in de limiet $\varepsilon \to 0$ aanleiding tot een decompositie van het spectrum in snelle en langzame segmenten, die bepaald kunnen worden aan de hand van de gereduceerde eigenwaardeproblemen, welke lager-dimensionaal en daarom beter behapbaar zijn. Dit leidt tot *asymptotische controle* over het spectrum.

Echter, asymptotische controle over het spectrum is dikwijls onvoldoende om stabiliteit van de patroonoplossing aan te tonen: door *translatie-invariantie* – elke ruimtelijke translatie van het patroon is namelijk weer een oplossing van het reactie-diffusiesysteem – bevindt er zich spectrum nabij de oorsprong in het complexe vlak. In de limiet $\varepsilon \to 0$ convergeert dit spectrum naar de oorsprong toe en dus is asymptotische controle onvoldoende om de fijnstructuur van de spectrum nabij de oorsprong te bepalen. Echter, de precieze locatie van spectrum ten opzichte van de imaginaire as is doorslaggevend voor stabiliteit. Daarom dient in veel gevallen de Evansfunctieanalyse gecomplementeerd te worden met een lokale analyse van het spectrum nabij de oorsprong.

De geometrische factorisatiemethode van de Evansfunctie is ontwikkeld in de context van patroonoplossingen in *langzaam-lineaire* prototypesystemen – zoals de FitzHugh-Nagumo-, Gray-Scott- en Gierer-Meinhardtvergelijkingen. In zulke systemen is de gereduceerde langzame dynamica lineair van aard. Recentelijk is de geometrische factorisatiemethode gegeneraliseerd voor de stabiliteitsanalyse van stationaire, homocliene pulsoplossingen in een klasse van langzaam-*niet*-lineaire reactie-diffusiesystemen met twee componenten. Het is aangetoond dat de dynamica in zulke systemen fundamenteel anders – en rijker – is dan in langzaam-lineaire systemen.

In dit proefschrift bestuderen we stationaire, ruimtelijk *periodieke* pulsoplossingen in langzaam-niet-lineaire reactie-diffusievergelijkingen met een *willekeurig* aantal componenten. Hoewel er op het eerste oog weinig verschil lijkt te zijn met de situatie van homocliene pulsoplossingen, is de geometrische factorisatiemethode in ons geval niet toepasbaar. Bovendien raakt er een spectrale kromme aan de oorsprong, die in de limiet $\varepsilon \to 0$ ineenkrimpt tot een punt. Hierdoor is een additionele analyse van het spectrum nabij de oorsprong noodzakelijk, terwijl in het homocliene geval er zich slechts een simpele, geïsoleerde eigenwaarde op de oorsprong bevindt.

Voor de stabiliteitsanalyse van periodieke pulsoplossingen zijn dus nieuwe reductiemethodes nodig. In dit proefschrift presenteren we een alternatieve, *analytische* factorisatiemethode voor de Evansfunctie. Deze analytische methode werkt, in tegenstelling tot zijn geometrische tegenhanger, voor periodieke patronen in langzaam-niet-lineaire systemen. Bovendien kan de methode onafhankelijk van specifieke systemen of patroonoplossingen worden geformuleerd en werkt zij voor een willekeurig aantal componenten. Daarmee bewijst onze analytische methode ook haar nut buiten de context van periodieke pulsoplossingen. Ten tweede ontrafelen we in dit proefschrift de fijnstructuur van het spectrum nabij de oorsprong door lokaal het inverteren van het oneindigdimensionale eigenwaardenprobleem te reduceren tot het oplossen van een eendimensionale vergelijking. Door de termen in de laatstgenoemde vergelijking uit te rekenen in de limiet $\varepsilon \to 0$ verkrijgen we een expansie van de kritieke spectrale kromme die aan de oorsprong raakt.

De twee reductiemechanismen uit de vorige alinea geven voldoende controle over het spectrum om expliciete *stabiliteitscriteria* op te stellen in termen van gereduceerde, lager-dimensionale eigenwaardeproblemen. Zo kan men stabiliteit van stationaire, periodieke pulsoplossingen in een tweecomponentensysteem bewijzen door een aantal voorwaarden te checken in scalaire Sturm-Liouvilleproblemen. Bovendien vinden we instabiliteitscriteria in termen van het teken van een aantal expliciete uitdrukkingen die uitgerekend kunnen worden met slechts de asymptotische benadering van het pulsprofiel als input. Tot slot leidt de controle over het spectrum tot inzichten in *destabilisatiemechanismen* van periodieke pulsoplossingen. Het is mogelijk de verschillende soorten instabiliteiten te karakteriseren aan de hand van de voorgenoemde stabiliteitscriteria. In het bijzonder kunnen we de destabilisatiemechanismen van een periodieke pulsoplossing die convergeert naar een homocliene puls zeer gedetailleerd beschrijven.

De opzet van dit proefschrift is als volgt. In Hoofdstuk 1 geven we een literatuuroverzicht van de huidige reductiemethodes voor de existentie- en stabiliteitsanalyse van patroonoplossingen in reactie-diffusiesystemen met een kleine parameter. We leggen uit waarom deze reductiemethodes niet geschikt zijn voor de stabiliteitsanalyse van periodieke pulsoplossingen in langzaam-niet-lineaire systemen. Tevens introduceren we de algemene klasse van langzaam-niet-lineaire reactie-diffusiesystemen met een willekeurig aantal componenten die we beschouwen in dit proefschrift. In Hoofdstuk 2 construeren we periodieke pulsoplossingen in deze klasse van reactie-diffusiesystemen met behulp van geometrische singuliere-storingsrekening. In Hoofdstuk 3 presenteren we het hoofdresultaat van dit proefschrift: expliciete stabiliteits- en instabiliteitscriteria in termen van lager-dimensionale eigenwaardeproblemen. De volgende twee hoofdstukken zijn gewijd aan het bewijs van ons hoofdresultaat. In Hoofdstuk 4 behandelen we de voorkennis noodzakelijk voor de stabiliteitsanalyse. Hoofdstuk 5 bevat dan de werkelijke stabiliteitsanalyse: we factoriseren de Evansfunctie via onze alternatieve, analytische reductiemethode en we expanderen de kritieke spectrale kromme. In Hoofdstuk 6 concentreren we ons op destabilisatiemechanismen van periodieke pulsoplossingen. Tot slot bevat Hoofdstuk 7 een overzicht van toekomstige onderzoeksmogelijkheden.