# Radicals in arithmetic

Palenstijn, W.J.

**Author**: Palenstijn, Willem Jan
**Title**: Radicals in Arithmetic
**Issue Date**: 2014-05-22

# Curriculum vitae

Willem Jan Palenstijn is geboren op 9 juni 1980 te Leiden, en heeft daar in 1998 het VWO-diploma behaald aan het Stedelijk Gymnasium Leiden.

Direct aansluitend is hij aan de Universiteit Leiden begonnen aan de opleidingen Wiskunde en Informatica, en heeft hij in 1999 van beide de propedeuse afgerond. Tijdens het vervolg van de studie Wiskunde heeft hij ook nog een groot aantal Informatica-vakken gevolgd. Onder begeleiding van dr. Bart de Smit heeft hij een afstudeerscriptie *Galois Action on Division Points* geschreven, en is daarmee in 2004 cum laude afgestudeerd. In dat jaar is hij ook aan zijn promotieonderzoek op het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden begonnen onder begeleiding van prof. dr. Peter Stevenhagen en dr. Bart de Smit.

Over de resultaten hiervan heeft hij tijdens zijn promotietraject voordrachten gegeven op congressen in de Verenigde Staten, Italië, Groot Brittannië, Frankrijk en Duitsland. Naast dit onderzoek heeft hij werkcollege's voor zowel bachelor- als master-vakken gegeven, en voor de Stichting Vierkant voor Wiskunde als vrijwilliger zomerkampen voor middelbare scholieren begeleid.

Van 2009 tot en met april 2014 heeft hij als wetenschappelijk programmeur bij het iMinds-Visielab van de Universiteit Antwerpen in België gewerkt aan algoritmen voor tomografische reconstructie van CT- en MRI-beelden.

Dit proefschrift heeft hij begin 2014 afgerond.

## Stellingen

behorende bij het proefschrift

# Radicals in Arithmetic

door Willem Jan Palenstijn

1. Zij $K$ het kwadratische getallenlichaam $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$. De dichtheid van priemidealen $\mathfrak{q}$ van $\mathcal{O}_K$ waarvoor $-15$ een primitieve wortel is modulo $\mathfrak{q}$, is onder aanname van de Gegeneraliseerde Riemann-Hypothese (GRH) gelijk aan $108/95 \cdot A \approx 0,4251$, met $A$ de constante van Artin.

2. Zij $T$ de norm-1-torus gedefinieerd door $x^2 + 3y^2 = 1$ over $\mathbf{Q}$ met vermenigvuldiging als in Sectie 6.2, en zij $x \in T(\mathbf{Q})$ het punt met coördinaten $(-13/14, 3/14)$. Onder aanname van GRH is de dichtheid van priemgetallen $q$ waarvoor het beeld van $x$ in $T(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ gedefinieerd is en heel $T(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$ voortbrengt, gelijk aan $168/205 \cdot A \approx 0,3065$.

3. Zij $T$ een torus van rang 1 gedefinieerd over een lichaam $K$, en $P$ een element van $T(K)$. Zij $n$ een positief geheel getal niet deelbaar door de karakteristiek van $K$, en $w$ het aantal $n$-torsiepunten in $T(K)$. Definieer $L \supset K$ als het lichaam verkregen door het adjungeren van de coördinaten van alle punten $Q \in T(\bar{K})$ die voldoen aan $Q^n = P$. Dan is $L$ abels over $K$ dan en slechts dan als er een punt $R \in T(K)$ bestaat dat voldoet aan $P^w = R^n$.

4. Het aantal drietallen positieve, onderling ondeelbare gehele getallen $(a, b, c)$ met $a + b = c$ en $a \leq b < c < 10^{18}$ waarvoor het product van de priemdelers van $abc$ kleiner is dan $c$, is gelijk aan 14 482 065.

5. Beschouw het volgende spel voor twee spelers. Op het spelbord staan de getallen 0 tot en met 14. In de beginstand zijn vier fiches op het bord geplaatst, op de getallen 9, 10, 13 en 14.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ● | ● | 11 | 12 | ● | ● |

De spelers doen om beurten een zet. Een zet bestaat uit het verplaatsen van een fiche naar een lager getal waarop nog geen fiche ligt. Een speler verliest als hij geen zet meer kan doen. Bij optimaal spel van zijn tegenspeler verliest de speler die begint.

6. Gegeven een afbeelding $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, is de gevulde Juliaverzameling van $f$ gedefinieerd door $K(f) = \{z \in \mathbf{C} : \{f^n(z) : n \geq 1\} \text{ is begrensd}\}$.

   Voor een kwadratisch polynoom $f$ is $K(f)$ samenhangend of volledig onsamenhangend. Uit experimenten blijkt dat het samenstellen van een kwadratisch polynoom met een niet-conforme, $\mathbf{R}$-lineaire schaling van het complexe vlak kan leiden tot een gevulde Juliaverzameling die onsamenhangend is met een niet-leeg binnengebied.

   (de Smit, McClure, Palenstijn, Sparling, Wagon, *Through the Looking-Glass, and What the Quadratic Camera Found There*, The Mathematical Intelligencer, 2012.)

7. Beschouw een getallendriehoek waarvan de onderste rij een permutatie van de getallen 0 t/m 9 is waarbij twee opeenvolgende getallen geen buren mogen zijn. In de rijen daarboven is elk getal de som van de twee getallen er direct onder. De score van een rij is het maximum min het minimum van de getallen op de rij. De score van de gehele driehoek is het bovenste getal plus de som van de scores van de rijen eronder.

   De driehoek hiernaast is een voorbeeld voor de getallen 0 t/m 3, met score $19 = 12 + 2 + 2 + 3$.

   De maximale score voor een driehoek met de getallen 0 t/m 9 is 4245. (Met dank aan Maurice Alberts.)

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 12 & & & \\ & & 7 & & 5 & & \\ & 4 & & 3 & & 2 & \\ 1 & & 3 & & 0 & & 2 \end{array}$$

8. Eén methode om veel Japanse puzzels op te lossen is het uitvoeren van alternerend horizontale en verticale stappen. Een horizontale of verticale stap bestaat hier uit het doorlopen van alle lijnen in die richting, en dan per lijn het inkleuren van alle vakjes waarvoor de kleur vastligt volgens de omschrijving van die lijn en de al eerder ingekleurde vakjes.

   Zij $n \geq 18$ een geheel getal dat voldoet aan $n \equiv 2 \pmod 8$. Dan bestaat er een $n \times n$ Japanse puzzel waarvoor de hierboven beschreven methode $(n^2 - \frac{11}{2}n + 5)/2$ stappen nodig heeft.

   (Batenburg, Henstra, Kosters, Palenstijn, *Constructing Simple Nonograms of Varying Difficulty*, Pure Mathematics and Applications, 2009.)

9. Een numerieke algoritme voor het oplossen van een toegepast probleem die goed genoeg werkt en geen parameterkeuze nodig heeft zal in de praktijk vaker gebruikt worden dan een algoritme die betere resultaten kan produceren voor een optimale keuze van parameters. Dit kan tot wrijving leiden tussen ontwikkelaars van algoritmen en gebruikers ervan.

10. Veel moderne PC-desktop-omgevingen hinderen een gebruiker meer dan nodig bij bijvoorbeeld het schrijven van een proefschrift.

11. Een wiskundige kijk op de wereld is een aanwinst bij *reverse engineering* van software.