



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Uniform infinite and Gibbs causal triangulations

Zohren, S.

Citation

Zohren, S. (2012, December 19). *Uniform infinite and Gibbs causal triangulations*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/20324>

Version: Corrected Publisher's Version

License: [Licence agreement concerning inclusion of doctoral thesis in the Institutional Repository of the University of Leiden](#)

Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/20324>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/20324> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Zohren, Stefan

Title: Uniform infinite and Gibbs causal triangulations

Date: 2012-12-19

Samenvatting

In deze dissertatie onderzoeken wij aspecten van uniforme oneindige causale triangulaties (UICT) en Gibbs causale triangulaties. Beide zijn kansformuleringen van zogenaamde causale dynamische triangulatiemodellen (CDT) voor kwantumgravitatie.

Omdat causale triangulaties in bijjectie zijn met planaire gewortelde bomen, is de UICT maat equivalent met de uniforme maat voor planaire gewortelde bomen. Dit wordt ook wel een grootte geconditioneerd kritisch Galton-Watson proces¹ genoemd. Als eerste focussen wij onze aandacht op kansbomen. In hoofdstuk 2 onderzoeken wij de fractale en spectrale dimensie van bomen met een uniek oneindig pad - de *spine*. Er zijn vele kansboomensembles waar in de continuümlimiet de maat vrijwel zeker condenseert op bomen met deze eigenschap. Voorbeelden zijn generieke kritische bomen en niet generieke kritische bomen. Dit zijn eigenlijk grootte geconditioneerde kritische Galton-Watson bomen met eindige en oneindige variantie. Wij verkrijgen een boven en beneden grens voor de spectrale dimensie in termen van de fractale dimensie en wat wij noemen de *hull* dimensie. In het geval waar de uitgroeiingen vanuit de spine onafhankelijk en identiek gedistribueerd (*i.i.d.*) zijn en als de uitgroeiingen snel genoeg afvallen verkrijgen wij een simpele expressie voor de fractale en spectrale dimensie. Wij passen deze methoden toe op generieke en niet generieke kritische bomen en ook op modellen van willekeurig groeiende bomen.

In hoofdstuk 3 behandelen wij in detail de relatie tussen de UICT maat en de grootte geconditioneerd kritisch Galton-Watson proces maat. Behalve een gedetailleerd bewijs van het bestaan van de maat geven wij resultaten over de convergentie van de herschaalde randlengte naar een diffusieproces. Verder laten wij zien dat het stochastische proces van de herschaalde oppervlakte convergeert naar een stochastische in-

¹Grootte conditionering betekent dat de grote van de boom vast wordt genomen, en gelijk aan N , waarbij men de limiet neemt $N \rightarrow \infty$.

tegraal over het lengteproces. Deze relatie stelt ons in staat om de Feynman-Kac procedure te gebruiken, dit staat in de natuurkundeliteratuur als de effectieve Kwantumhamiltoniaan. Dit geeft een wiskundig precieze formulering van bepaalde schalingslimieten van CDT en geeft een connectie met eerdere publicaties in het gebied van CDT in de natuur- en wiskundeliteratuur.

Hoofdstuk 4 is gewijd aan de bestudering van een groeiproces voor UICT waarbij er twee elementaire bewerkingen zijn waarbij een driehoek wordt toegevoegd met een bepaalde waarschijnlijkheid. Wij laten een overeenkomst zijn met het groeiproces van een Markov ketting $\{M_n\}_{n \geq 0}$ voor de positieve gehele getallen. Gebruikmakende van de eigenschappen van deze Markov ketting schatten wij de geodetische afstand t_n van een driehoek tot de initiële rand na een bepaalde groeitijd n . Deze relatie gebruiken wij om te bewijzen dat de fractale dimensie vrijwel zeker gelijk is aan twee, $d_h = 2$. Wij gebruiken dus het groeiproces een plaats van het vertakkingsprocesbeeld voor een alternatief bewijs. Verder laten wij zien dat het stochastische proces van de herschaalde lengte ook convergeert naar een diffusieproces. Dit proces kan gerelateerd worden aan de geodetische afstand via een willekeurige tijdsverandering. Dit laat zien dat er een dualiteitsrelatie bestaat tussen het groeiproces en het vertakkingsproces. Bij het groeiproces is de oppervlakte vast en de geodetische afstand geschat, terwijl bij de vertakkingsprocesbeeld de geodetische afstand vast is terwijl de oppervlakte wordt geschat. Deze dualiteitsrelatie geeft een precieze formulering van het zogenoemde afpelproces voor CDT.

In hoofdstuk 5 behandelen wij een canonieke formulering van het causale triangulatieensemble door introductie van een Gibbs maat met Boltzmann gewicht $e^{-\mu|T|}$, waarbij $|T|$ de grootte is van de triangulatie en waarbij μ de kosmologische constante is. Wij introduceren het overgangsmatrixformalisme en gebruikmakende van Krein-Rutman theorie laten wij zien dat de vrije energie convergeert naar de grootste eigenwaarde van de overgangsmatrix. Dit bepaalt de maat in de continuümlimiet waar de kritische waarde μ_c voor de kosmologische constante correspondeert met UICT. Wij veralgemenen deze analyse naar het Ising model gekoppeld aan causale triangulaties. Gebruikmakende van Krein-Rutman theorie bepalen wij de gebieden in de parameter ruimte waarbij de partitiefunctie convergeert. Dit is een eerste stap naar het bepalen van de kritische curve en daarmee dus een eerste stap naar een analyse van de faseovergang van het model.

In de laatste paragrafen van hoofdstukken 2 - 5 bespreken wij mogelijke uitbreidin-

gen van de door ons ontwikkelde resultaten. Het meest interessante is wellicht om de spectrale dimensies te bepalen voor de volledige parameterruimte van het *attachment and grafting* model alsmede Ford's α -model [61] en de bijbehorende generalisatie, het $\alpha\gamma$ -model [76]. Verder is er tot zover slechts een bovenlimiet voor de spectrale dimensie van CDT, $d_s \leq 2$. Het zou daarom dus interessant zijn als wij de hier behaalde resultaten kunnen gebruiken om te bewijzen dat deze grens strikt is, en dat deze vrijwel zeker gelijk is aan, $d_s = 2$. Ook zou het interessant zijn om onze resultaten voor het groeiproces te gebruiken om eerder werk van Angel [14] over het groeiproces voor uniforme oneindelijke planaire triangulaties (UIPT) uit te breiden naar de convergentie van een Lévy proces. In deze context is het ook interessant om dit door te trekken naar zogenoemde multikritische modellen van DT [53, 92] en CDT [93, 94]. Dit zijn op het moment actieve onderzoeksgebieden.

Een andere zeer interessante onderzoeksrichting met Stefánsson is om de schalingslimiet van CDT te formuleren als een variant van een Brownse afbeelding, zie paragraaf 1.2. Wij hebben gezien dat causale triangulaties in bijectie zijn met planaire gewortelde bomen en dat daarbij het labelingproces triviaal is. Dit versimpelt de formulering van de schalingslimiet aanzienlijk. Aan de andere kant is het door de gelaagde structuur van de causale triangulaties moeilijker om het volume van ballen rondom een willekeurig gekozen punt van de triangulatie te bepalen. Gegeven dat de convergentie van de schalingslimiet van de causale triangulatie bewezen is, verwachten wij dat verschillende eigenschappen van de schalingslimiet volgen uit simpele eigenschappen van de Brownse excursie.

Samenvattend, hopen wij de lezer overtuigd te hebben dat kansaspecten van CDT, specifiek de UICT en Gibbs causale triangulaties, interessant zijn om te onderzoeken. Deze formuleringen kunnen gezien worden als kansmodellen op zichzelf, maar zijn ook van essentieel belang voor de het fysische begrip van CDT. Hierbij is wellicht de bestudering van de spectrale dimensie het meest belangrijk.

