



Universiteit
Leiden
The Netherlands

Vortex Duality in Higher Dimensions

Beekman, A.J.

Citation

Beekman, A. J. (2011, December 1). *Vortex Duality in Higher Dimensions*. *Casimir PhD Series*. Retrieved from <https://hdl.handle.net/1887/18169>

Version: Not Applicable (or Unknown)
License: [Leiden University Non-exclusive license](#)
Downloaded from: <https://hdl.handle.net/1887/18169>

Note: To cite this publication please use the final published version (if applicable).

Samenvatting

Om de verschijnselen in de natuur te beschrijven, hebben we niet alleen de fundamentele wetten—zoals de Coulombkracht van elektromagnetische wisselwerking—nodig, maar ook een manier om uit te leggen hoe deeltjes zich onder die wetten collectief gedragen. Het blijkt dat elementaire deeltjes *volledig* identiek zijn, dus dat we bijvoorbeeld het ene elektron op geen enkele manier van een andere kunnen onderscheiden. Daarnaast zijn er buitengewoon veel van die identieke deeltjes, een gram water bestaat uit grofweg 10^{23} moleculen. Als we dus willen weten hoe de materie om ons heen: vloeistoffen, tafels, koperdraden of neutronensterren zich gedragen, dan zijn we in de gelukkige toestand dat we maar een paar simpele ingrediënten hebben, in gigantische hoeveelheden, waardoor alle onbelangrijke effecten vrijwel altijd uitmiddelen. Inderdaad is het mogelijk om een natuurkundige vergelijking op te schrijven die in principe alle deeltjes en hun wisselwerkingen bevat, en dus naïef gezien alle antwoorden in zich moet dragen. Maar aangezien een systeem van al slechts drie deeltjes op dit moment wiskundig onoplosbaar is, zou die aanpak snel vruchteloos en onmogelijk worden.

Collectief gedrag

Het is ook overbodig, wat met een allegorie goed in te zien is. Als ik een mayonaise-uitvinder ben, is het handig om te weten hoe emulsies precies werken, en dat lecithine in het eigeel een goede olie/water-emulgator is, maar cholesterol een water/olie-emulgator, en dat de toevoeging van mosterd daardoor schier onontbeerlijk is. De kok echter, wil gewoon het recept hebben, en de mayonaise produceren. De restauranthouder wil dat de kok lekkere gerechten, al dan niet met mayonaise, maakt, de eigenaar wil enkel een kwalitatief goede en efficiënte bedrijfsvoering, zich niet bekommerend om welke ingrediënten dan ook. De gast verlangt simpelweg een smakelijke

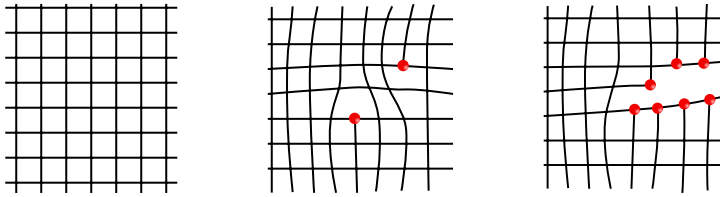
maaltijd. Kortom, alhoewel de geserveerde maaltijden mayonaise bevatten, is de mate waarin dat naar voren komt in de overkoepelende beschrijving afhankelijk van het niveau waarop je het beschouwt. Op een hoog niveau willen we alleen het resulterende, collectieve gedrag weten, de details zijn onbelangrijk. Een voorbeeld in de natuurkunde is bijvoorbeeld het elektrisch geleidingsvermogen van de koperdraad, een *macroscopische* eigenschap die het resultaat is van de *microscopische* interacties tussen al de 10^{23} elektronen. Het allerlaagste niveau, dat van de individuele elektronen, is zo goed als irrelevant.

Orde-parameter

Nu we hebben gezien dat het in veel gevallen een goed idee is ons alleen te richten op het effectieve, collectieve gedrag van veel-deeltjessystemen, hebben we een manier nodig om verschillende soorten gedrag te onderscheiden. We stellen dus bijvoorbeeld de vraag: “Wat maakt een vloeistof een vloeistof en niet een gas?” Een vloeistof heeft net zo min als een gas een regelmatige structuur, zoals een kristal dat wel heeft, dus dat valt af. Daarentegen heeft een vloeistof een voorkeursdichtheid: een vloeistof zal samendrukking tegenwerken, terwijl een gas dat niet of nauwelijks doet. De onsamendrukbaarheid is dus een goede grootheid om een vloeistof van een gas te onderscheiden. Omdat de onsamendrukbaarheid van een vloeistof zeer groot is, en van een gas veel kleiner, noemen we de vloeistof *meer geordend* dan een gas.

De onsamendrukbaarheid heet in deze context de *orde-parameter*. Die laatste is een grootheid of functie die nul is voor de ongeordende toestand, en niet nul oftewel *eindig* voor de geordende toestand. Een groot deel van het vakgebied dat tegenwoordig *gecondenseerde materie* heet, gaat over het precies definiëren en meten van orde-parameters. Het ontstaan van een voorkeurswaarde van de orde-parameter en daarmee de geordende toestand heet een *fase-overgang*, bijvoorbeeld het condenseren van waterdamp (gas) tot water (vloeistof).

Dit proefschrift gaat in essentie over faseovergangen. Normaal gesproken wordt er gekeken naar de overgang van minder naar meer orde, zoals in het bovenstaande voorbeeld. Maar het is ook mogelijk om te starten vanuit een geordende toestand, bijvoorbeeld ijs, en te zien hoe dat smelt tot in dit geval water. Hierbij gaan we dus van meer naar minder orde. Een



Figuur 7.1: (a) Een regelmatig metaalrooster (b) Rooster met op twee plaatsen ‘dislocaties’ (rood) die de regelmatigheid verstoren. (c) Het volledig verloren gaan van het rooster, oftewel smelten, is dual gezien de opeenhoping van dislocaties.

ander voorbeeld is hoe een ijzermagneet boven 770°C ‘smelt’ tot een niet-magnetische toestand. Dit is een *duale* manier van kijken naar de faseovergang: in plaats van hoe individuele deeltjes zich samen ordenen, concentreer je je op het verstoren van de totale geordende toestand. Het uitgangspunt is precies omgekeerd, maar de uitkomsten zijn volledig equivalent en net zo geldig. In sommige gevallen blijkt de duale manier, dus het ontstaan van wanorde door verstoringen in tegenstelling tot het ordenen van deeltjes, veel krachtiger dan andersom.

Vortices

Neem een paperclip in twee handen, en buig die een keer of tien. Hij zal breken op het buigpunt. Dit komt doordat het regelmatige metaalrooster bij iedere buiging verstoord wordt, zie figuur 7.1(b). Verantwoordelijk voor die verstoringen zijn zogenaamde ‘dislocaties’, de eindpunten van halve roosterlijnen die midden in het materiaal ophouden. Deze kosten veel energie om te maken, door de kracht die je met je handen uitoefent, maar kunnen daarvoor ook niet zomaar verdwijnen. De *metaalmoeheid* is dus de verzameling van dislocaties die altijd in het materiaal aanwezig blijven. Bij het breken van de paperclip gaan er teveel roosterverbindingen verloren om hem bijeen te houden, zie figuur 7.1(c). Dual gezien ontstaan er juist heel veel dislocaties: de teloorgang van de roosterverbindingen is dus als de opeenhoping van dislocaties.

Een dislocatie is een zogenaamd *topologisch defect*, waarbij topologisch betekent dat de effecten ervan door het hele materiaal merkbaar zijn. Een ander elementair topologisch defect is een *vortex*, zie figuur 2.1 op pagina



Figuur 7.2: Twee vortices in de vorm van een waterhoos boven de Waddenzee. Dit zijn geen puntdeeltjes maar dynamische lijnobjecten.

21. Een kolk in je badkuip en een wervelstorm zijn ook vortices (zie figuur 7.2). De kolk bestaat alleen in de vorm van het resulterende collectieve gedrag van een heleboel watermoleculen, en is dus inherent *niet-locaal*. Dat betekent dat je de snelheden van watermoleculen op een heleboel plekken moet weten voordat je kunt concluderen dat er een vortex bestaat. Toch is het wiskundig mogelijk om het middelpunt van de kolk als een lokaal object te beschouwen, net zoals we dat voor de dislocaties in figuur 7.1 ook hadden kunnen doen.

Supergeleiding

Zoals opgemerkt op pagina iii, is het precies 100 jaar geleden dat supergeleiding in Leiden werd ontdekt. Vrijwel alle elementaire metalen worden bij zeer lage temperatuur supergeleidend, wat betekent dat zij i) alle elektrische weerstand verliezen, en daardoor eeuwigdurende stromen kunnen herbergen, en ii) alle magneetvelden uit hun binnenste verdrijven. In sommige supergeleiders, die met de ongeïnspireerde naam *type-II* worden aangeduid, kan een magneetveld juist wel, in de vorm van vortexlijnen, het materiaal binnendringen. Of een supergeleider type-II is, hangt af van het materiaal, en is eigenlijk niet vooraf te voorspellen.

Supergeleiding is een gevolg van de collectieve wisselwerking tussen de elektronen en het metaalrooster, en daardoor heel goed met een orde-parameter te beschrijven, die in feite aan ieder punt in het materiaal een (virtuele) richting toewijst, oftewel een pijltje. In de supergeleidende toestand wijzen deze pijlen alle dezelfde kant op, het is dus een geordende toestand. Verstoringen in die orde-parameter kunnen in de vorm van vortices optre-

den, zoals op de omslag is uitgebeeld. Dit kan onder invloed van een magneetveld, maar kan ook spontaan gebeuren. De fase-overgang van supergeleidend naar 'normaal' kunnen we duaal dus opvatten als de opeenhoping van vortices. In termen van die vortices belanden we dan juist in een (dual) geordende toestand, die we vortexvloeistof noemen, omdat die ook een eindige onsamendrukbaarheid heeft.

Dit proefschrift

In dit proefschrift wordt de duale beschrijving van fase-overgangen, dus het verstoren van ordening door de opeenhoping van vortices, volledig omarmd en vervolgens uitgebreid.

Hoofdstuk 3 omschrijft de meest fundamentele vooruitgang: het generaliseren van deze vortex-dualiteit van twee naar drie ruimtedimensies plus tijd als vierde dimensie (dit heet "3+1" dimensies). In het platte vlak, dus in twee dimensies, is een vortex of dislocatie als een puntdeeltje. Maar net als de wervelstorm is een vortex in drie dimensies als een lijnvormig object. Je kunt je wel voorstellen dat een beschrijving van puntdeeltjes veel eenvoudiger is dan een beschrijving van lijnen (snaren), die zelf ook weer kunnen trillen en vervormen. Inderdaad waren de fase-overgangen in de duale, vortex-beschrijving tot op heden alleen beschikbaar in twee dimensies. Ik laat voor het eerst zien hoe dat werkt in drie dimensies. Een echte beschrijving van wat er met die vortexlijnen gebeurt is te ingewikkeld, maar we voorspellen dat het collectieve gedrag van die lijnen in feite precies hetzelfde is als het collectieve gedrag van puntdeeltjes. Omdat we dit via de dualiteit direct staven aan de gewone (niet-duale) beschrijving van een eenvoudig, veelgebruikt model, is deze voorspelling zeer plausibel.

Als je een puntdeeltje door de tijd volgt zal je een 'lijn in de geschiedenis' uittekenen, net zoals de condensatiestrepen van een vliegtuig in de lucht. Dit heet een *wereldlijn*. Maar als je een lijnobject in de tijd volgt, krijg je een tweedimensionaal *wereldoppervlak*. Deze worden in de natuurkunde van elementaire deeltjes veelvuldig gebruikt, maar in de gecondenseerde materie nauwelijks. In onze 3+1-dimensionale vortex-dualiteit zijn vortex wereldoppervlakken aan de orde van de dag. Maar omdat de kennis erover beperkt is, leek het een goed idee deze eerst toe te passen op het bekende probleem van de magnetische vortices in supergeleiders. Dit levert een fraaie en compacte wiskundige beschrijving ervan op, die alle bekende

effecten gerelateerd aan zulke vortices in één enkele vergelijking kan vatten (vergelijking (4.43) in hoofdstuk 4). Deze wereldoppervlakbenadering is zo aantrekkelijk dat zij zelfs in het onderwijs over vortices in supergeleiders gebruikt zou kunnen worden.

De algemene generalisatie van vortex-dualiteit in hogere dimensies van hoofdstuk 3 wordt in hoofdstuk 5 toegepast op het specifieke geval van supergeleiders. De supergeleidende toestand is geordend, en die orde wordt verstoord door de toename van vortices. Uiteindelijk zullen we door de fase-overgang in een elektrisch isolerende toestand genaamd *Mott isolator* terecht komen. Daarin hebben de ladingsdragers onderling een sterke afstotende wisselwerking en komen daardoor ‘vast’ te zitten, zodat ze niet meer vrij kunnen bewegen en lading transporteren. Volgens de vortex-dualiteit heeft deze isolerende toestand weer zijn eigen vortices. Deze zijn gequantiseerde lijnen van elektrische stroom. Dus net zoals een supergeleider magneetveld verdrijft, maar er vortexlijnen van magneetveld doorheen kunnen gaan, verdrijft een Mott isolator elektrische stroom maar blijkt wel stroomdraadjes te vormen onder invloed van een van buitenaf opgelegde stroom. Het woord ‘gequantiseerd’ betekent dat de hoeveelheid stroom door ieder draadje niet variabel is, maar een vaste waarde heeft. De totale stroom kan dus alleen toenemen door meer vortexlijnen te maken, niet door de stroom per lijn te verhogen. Ook kan de stroom pas gaan lopen als de eerste vortexlijn gevormd wordt, dus boven een bepaalde drempelwaarde voor de stroom. Dit is een vrij harde voorspelling, en in figuur 5.4 op pagina 109 wordt een aantal experimenten gesuggereerd dat dit nieuwe, verrassende fenomeen zou moeten kunnen bevestigen. Het mooiste wat je als theoreticus kan bereiken, is het voorspellen van een nieuw natuurverschijnsel dat vervolgens experimenteel bevestigd wordt.

Het laatste hoofdstuk 6 is meer inzichtelijk dan voorspellend van toon. Enkele achterliggende principes die zich in de vortex-dualiteit steeds opdringen, worden toegelicht en met elkaar verbonden. Deze principes zijn wiskundig van aard—en daardoor wat lastiger in een paar regels uit te leggen—maar onthullen belangrijke structuren die ten grondslag liggen aan het gedrag van natuur zoals wij die ervaren. Het gaat in feite over *behouden grootheden*, maar vooral over hoe die zich aan weerszijden van de vortex-dualiteit manifesteren. Gebruikmakend van deze algemene principes kunnen we een eerste uitbreiding voorzien: die naar quantum kristallen en hoe die door

opeenhoping van dislocaties smelten tot quantum vloeibare kristallen. De vortex-dualiteit is zo ruimer toepasbaar dan alleen op supergeleiders, en lijkt te moeten gelden voor de meeste orde–wanorde fase-overgangen.

