'Wishful thinking': grondslagen van de wiskunde voor Gödel

GÖRAN SUNDHOLM

De belangrijkste ontwikkelingen in de negentiende eeuw binnen (de grondslagen van) de wiskunde worden in dit artikel kort uiteengezet, meer bepaald de aritmetisering van de analyse en niet-euclidische meetkunde. Uitgaande van het inhoudsprobleem voor formele systemen komen de funderingspogingen in het logicisme van Frege (en later ook van Russell) en Brouwers intuïtionisme aan de orde, evenals Hilberts formalisme waar inhoud achterwege wordt gelaten. Ter afsluiting wordt de betekenis van Gödels onvolledigheidsstellingen voor deze posities besproken.

De negentiende eeuw kan gezien worden als een periode van onafgebroken vooruitgang in de wiskunde. Door het werk van Bolzano, Cauchy en vooral de Berlijnse hoogleraar Karl Weierstrass, leken de eerdere landwinningen in de integraal- en differentiaal-calculus (Euler, Lagrange) op een veilig fundament te berusten. De grondslagen van de wiskundige analyse werden onafhankelijk gemaakt van meetkundige *intuïtie*, waarbij Weierstrass' ε–δ methode voor de behandeling van limietprocessen de beslissende rol speelde. De rekenkunde van de *hele* (positieve en negatieve getallen), zowel als van de *rationele* getallen (de breuken), zijn echter gemakkelijk (via 'algebraïsche' constructies) terug te voeren tot de (rekenkunde van de) *natuurlijke* getallen 0, 1, 2, 3,... . Dedekind, Cantor, en Weierstrass lieten op verschillende wijzen zien hoe ook de *reële* getallen (dit wil zeggen de oneindige decimaalbreuken) teruggevoerd konden worden naar de natuurlijke getallen, onafhankelijk van meetkundige inzichten betreffende de punten op een lijnstuk. De verzamelingtheoretische (eerder dan algebraïsche) inzichten die hiervoor nodig waren, werden door Dedekind ingezet om een nieuwe weg te banen in de algebra met zijn theorie van 'idealen' en kregen een systematische uitwerking in Cantors theorie van steeds groter wordende oneindigheden.

Gauss, Bolyai en Lobaschewski ontdekten consistente systemen van niet-euclidische meetkunde. Het gewone parallellenpostulaat zegt dat voor een gegeven vlak, een lijn in dat vlak, en een punt op het vlak buiten de lijn, er precies één lijn is door het gegeven punt, die parallel is met de gegeven lijn. In de niet-euclidische meetkunde wordt dit ontkend; er zijn dan nul of meerdere parallelle lijnen. Door onder anderen Klein en Poincaré werd ontdekt dat men modellen voor de niet-euclidische meetkunde kon geven binnen de euclidische meetkunde. Als de euclidische meetkunde vrij van tegenspraak is, dan ontstaan er ook binnen de niet-euclidische meetkunde geen tegenspraken: vanwege het modelleren van niet-euclidische begrippen binnen de euclidische meetkunde zou een niet-euclidische tegenspraak onmiddellijk terugslaan binnen de euclidische meetkunde. Maar die is immers vrij van tegenspraak; door de bekende cartesiaanse methode van *analytische* representatie gaat de euclidische meetkunde over in een stukje rekenkunde voor de reële getallen.

Door deze ontwikkelingen in de meetkunde onderging het axiomabegrip een grote verandering die zijn voltooiing kreeg in het werk van David Hilbert. Volgens één van zijn beroemde uitspraken 'spreken wij in de meetkunde van punten, vlakken, en lijnstukken. In feite kunnen wij evenwel spreken over tafels, stoelen en bierglazen.' De (meetkundige) axioma's werden langs deze weg ontdaan van *inhoud*. Zij zijn niet meer *zelfevidente oordelen*, maar geven nu *impliciete definities* van de in hen voorkomende begrippen; slechts de onderliggende begrijpelijke *verhoudingen* zijn belangrijk.

Verder door het werk van Gauss, Fourier en anderen, kreeg wiskunde een centrale plaats voor de natuurwetenschappen; men denke aan de geodesie, de sterrenkunde, de thermodynamica, de theoretische optica, enzovoort; een (natuur-)wetenschap ontleent haar bruikbaarheid en legitimiteit aan de mate waarin zij wiskundige methoden en begrippen benut.

Freges logicistisch funderingsprogramma

Na deze ontwikkelingen was het duidelijk dat de natuurlijke getallen een fundamentele positie innamen, niet alleen wat betreft de alledaagse huis-tuin-en-keuken-toepassing van het wiskundig denken, maar ook voor zijn stelselmatige fundering. De andere delen van de wiskunde waren immers door algebraïsche en verzamelingtheoretische constructies teruggebracht tot de rekenkunde van deze natuurlijke getallen. Hier lijkt echter geen verdere wiskundige reductie mogelijk: een eenvoudiger stelsel van getallen is er niet. Hoe kon men er in dit geval zeker van zijn dat er geen ongeoorloofde assumpties voorkomen? En dat de intuïtie niet op een onterechte manier gebruikt werd om tot valse of ongegronde stellingen te komen?

De Duitse wiskundige Gottlob Frege probeerde deze vragen op een briljante manier te beantwoorden. Ten eerste gaf hij in zijn boekje *Begriffsschrift* van 1879 een symbolische formuletaal voor het uitdrukken van logische begrippen en het weergeven van gevolgtrekkingen. Ten tweede constateerde hij dat inhoud slechts een rol speelt bij het kiezen en het kentheoretisch rechtvaardigen van deze axioma's en regels. Het controleren van de correctheid van een afleiding kan daarna in beginsel geschieden door een machine op grond van louter syntactische overwegingen (die dus louter op de tekens zelf betrekking hebben). Ten slotte wilde hij de inhoud van de wiskundige beginselen veilig stellen en controleerbaar maken door de wiskundige begrippen te definiëren in termen van zuiver *logische* begrippen.

Volgens Frege was een verdere reductie van de rekenkunde dus *toch* mogelijk, maar niet naar een ander wiskundig getallenstelsel. Frege wil de rekenkunde reduceren naar de *logica*. Zijn poging tot fundering van de wiskunde is derhalve een *logicisme*. Zijn aristotelisch funderingsdenken in termen van traditionele axiomatiek staat in zekere zin haaks op de vernieuwde inhoudsloze axiomatiek van Hilbert. Er vond dan ook een felle correspondentie over dit thema plaats tussen de twee denkers.

Frege had in Göttingen gestudeerd en het is opvallend hoe goed zijn oeuvre past binnen het Göttingen-paradigma betreffende de centrale rol van de wiskunde. Aan de ene kant is zijn voornemen het verkrijgen van maximale zekerheid in de bewijsvoeringen – de stevigste (*festeste*) bewijsvoering is de zuiver logische – en aan de andere kant is zijn logica een zeer *gemathematiseerde* logica. Immers, Freges boekje draagt de ondertitel 'een op de rekenkunde gemodelleerde formuletaal voor het zuivere denken'. Zijn logica ontleent haar legitimiteit en bruikbaarheid aan het inzetten van wiskundige begrippen en methoden.

In zijn boek *Grundlagen der Arithmetik uit 1884* gaf Frege eerst een *informele* reductie, wellicht op voorstel van Carl Stumpf. Freges intentie was hier om Kant op één punt te corrigeren, namelijk voor wat betreft de status van de rekenkunde. Zij is volgens Kant synthetisch a priori, maar volgens Frege *analytisch* (want zuiver logisch te funderen). Een definitie van het getal 12 in Freges geest kan als volgt verlopen:

> $12 =_{\text{def}}$ De omvang van het begrip 'begrip dat gelijktallig is met het begrip "*maand van het jaar*"'.

De twee begrippen '*apostel van Christus*' en '*teken van de dierenriem*' behoren dus beide tot de begripsomvang 12.

Freges poging tot een geformaliseerde en tegelijk inhoudelijk gefundeerde behandeling van de rekenkunde liet echter op zich wachten, tot de twee banden van de *Grundgesetze der Arithmetik* (1893 respectievelijk 1903). De Zermelo-Russell paradox van 'de klasse van alle klassen die niet tot zichzelf behoren' (hoort deze klasse tot zichzelf of niet?) slaat toe, waardoor Freges systeem tegenstrijdig is. Zelfs na deze catastrofe pogen een aantal logici het logicisme te redden. A. N. Whitehead en Bertrand Russell gaven in de drie banden van hun monumentale *Principia Mathematica* (1910-13) weliswaar een afleiding van de klassieke wiskunde. Hun theorie, de *geramifieerde* typentheorie, is echter zeer complex. Deze complexiteit hadden zij nodig om de paradoxen te blokkeren. Desalniettemin laat de epistemologische status van een drietal 'axioma's' te wensen over. Zij krijgen geen rechtvaardiging, maar worden op louter pragmatische gronden expliciet als assumpties aangenomen, want anders is er geen afleiding van de wiskunde! De drie zijn het *oneindigheidsaxioma* ('er zijn oneindig veel individuen in het universum'), het *multiplicatieve* axioma ('gegeven een verzameling van niet-lege verzamelingen is er een verzameling die precies één element bevat uit elke verzameling in de gegeven verzameling' – je kunt een koekje kiezen uit iedere schaal!) en het *reducibiliteitsaxioma*, dat een deel van de complexiteit in de praktijk precies weer opheft.

Wittgensteins *Tractatus*, evenals het werk van F. P. Ramsey en Leon Chwistek, kan gezien worden als een poging om de gewenste semantische, zeg maar inhoudelijke fundering te geven voor een adequaat logicisme. De laatste poging waagt de logische empirist Rudolf Carnap in zijn bijdrage aan een befaamd congres van de *Wiener Kreis* in Koningsbergen, september 1930, maar daarna is het afgelopen.

Freges derde stap, namelijk een reductie naar de logica, lukt niet. Wellicht zijn andere funderingen mogelijk? Misschien kunnen wij *andere* formuletalen vinden met meer adequate betekenisverklaringen, zodat de axioma's en regels daadwerkelijk evident worden gemaakt? Onder anderen de Amerikaanse logici Church, Curry en Quine hebben allerlei pogingen ondernomen in deze richting, maar hun systemen bleken inconsistent te zijn. De twee desiderata, fundering van klassieke logica en veiliggestelde inhoud, lijken vooralsnog te hoog gegrepen.

Brouwer en de veilige inhoud

In de moderne analyse werd vaak de methode van indirecte bewijzen toegepast. De hoofdstelling van de algebra, bijvoorbeeld, zegt dat iedere veelterm $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ een wortel heeft, met andere woorden een getal z zodanig dat $p(z) = 0$, in het gebied van de complexe getallen. Om dit te bewijzen stelt men dat $p(z) \neq 0$ en leidt men een tegenspraak af. Zo'n bewijsmethode geeft geen indicatie hoe men een wortel vindt, in tegenstelling tot andere methoden die, als je de coëfficiënten $a_n, \ldots, a_1, a_0$ kent, een wortel van p berekenen met elke gewenste nauwkeurigheid. Vanaf 1908 nam de Nederlandse wiskundige L.E.J. ('Bertus') Brouwer afstand van deze indirecte methode. Blinde, inhoudsloze toepassing van logische regels is volgens hem niet geoorloofd. Hij trachtte de wiskunde van de grond af aan op heldere inhoud op te bouwen. Voor deze reconstructie waren nieuwe wiskundige begrippen zoals *keuzerijen* nodig en het gebruik van indirecte bewijzen werd zorgvuldig vermeden. Volgens Brouwer gaat aan de ? aan wiskunde de taal vooraf, in het bijzonder een *geformaliseerde* taal. De wiskundige moet alles zelf opbouwen vanuit zijn tijdsintuïtie en niet vertrouwen op misschien lege, tot niets voerende taalverzinsels.

Hilberts wiskundig positivisme

Het vroege werk van de Duitse wiskundige David Hilbert is bijzonder interessant vanuit het oogpunt van de grondslagen van de wiskunde. Wij hebben al gezien hoe instrumenteel hij was in het verjagen van inhoud uit de axiomatiek. Zijn eerste wiskundige faam verwierf hij echter juist door het voeren van *indirecte* existentiebewijzen: in plaats van expliciete constructie van het gezochte wordt slechts een tegenspraak afgeleid uit de assumptie dat er geen passende entiteit bestaat. Deze bewijzen vielen zowel bewondering als blaam ten deel: 'Dat is geen wiskunde maar theologie', zei Paul Gordan, en voor de strenge Leopold Kronecker waren indirecte existentiebewijzen helemaal uit den boze. Slechts de rekenkunde had voor hem echte wiskundige inhoud: 'De natuurlijke getallen zijn door God gegeven. Al de rest is mensenwerk.'

Zermelo's gebruik van zijn 'keuzeaxioma' goot olie op het vuur door prangende vragen omtrent mathematische existentie op te roepen. Als wij op een bord met koekjes precies een koekje van elke soort willen kiezen, dan doen wij dat gewoon een voor een, na elkaar. Maar in de wiskunde bevat het bord met koekjes vaak *oneindig* veel soorten koekjes, en wat dan? Er is simpelweg geen tijd in een mensenleven om oneindig veel keuzes achter elkaar te effectueren. Uit oneindig veel paren handschoenen of laarzen kunnen wij steeds de linker kiezen, maar als het om sokken gaat, hebben wij een probleem. Deze zijn immers symmetrisch. Als een voorafgaande ordening van de elementen in de soorten waaruit wij moeten kiezen, afwezig is, hoe moeten wij tot een keuze komen? Met name vooraanstaande Franse wiskundigen hebben over deze vragen omtrent het bestaan van een keuzemethode onafhankelijk van elke definitie vurig gedebatteerd.

Hilberts poging rond 1920 om uit dit grondslagenmoeras te klimmen was bijzonder ingenieus. Hij combineerde Kroneckers opvatting omtrent de ware rekenkundige, *combinatorische* natuur van de wiskunde met zijn eigen inhoudsloze axiomatiek: Hilbert accepteert Kroneckers *Verbotsdiktaat*. De echte wiskunde heeft een inhoud die de Duitser Hilbert *real* noemt. Slechts zeer eenvoudige uitspraken zijn *real*, namelijk de vrije-variabele vergelijkingen tussen berekenbare functies

(•) $f(x) = g(x)$, gegeven $x \in N$

en hun concrete invullingen (N staat voor de natuurlijke getallen). Omdat (•) equivalent is aan

(••) $f(x) - g(x) = 0$, gegeven $x \in N$

kan hij volstaan met uitspraken van de vorm

(•••) $f(x) = 0$, gegeven $x \in N$

waar f een berekenbare functie is. Deze uitspraken worden ook *verifieerbaar* genoemd, omdat voor elke concrete invulling f(k) uitgerekend kan worden. Wanneer zij waar zijn, ontlenen zij hun overtuigingskracht aan zeer elementaire berekeningsvoorschriften die wij allemaal moesten leren op de lagere school ('de tafel van 7', enzovoort). Voorts is *één* tegenvoorbeeld $f(k) \neq 0$ genoeg om een verifieerbare uitspraak $f(x) = 0$, $x \in N$, te weerleggen. Alle andere uitspraken in onze formuletaal hebben geen inhoud; het maakt niet uit waar de tekens $\forall$, $\exists$, (de zogenaamde kwantoren 'voor alle' en 'er zijn'), Cantors $\aleph_0$, ∞ (aanduidingen voor oneindige getallen), enzovoort voor staan; zij zijn *ideale* elementen met een slechts theoretische rol. Het enige wat telt is het *reale* gedeelte, dat wil zeggen de verifieerbare uitspraken. Met andere woorden, Hilbert past de positivistische slogan 'the verifiable consequences must check out' toe op de wiskunde:

> Wanneer de *reale* formule $f(x) = 0$, $x \in N$, bewijsbaar is in het ideale (inhoudsloze) systeem *I*, dan moet zij ook *real* waar zijn.

Een natuurkundige theorie moet conservatief zijn met betrekking tot observatie-uitspraken, anders gezegd je kan niet meer afleiden dan de observaties toelaten. Op soortgelijke wijze eist Hilbert dat ideale wiskunde conservatief is boven reale wiskunde met betrekking tot *reale* uitspraken.

Hilbert observeerde dan dat als *I consistent* is, dit wil zeggen vrij van tegenspraak is, dan is iedere ideaal bewijsbare *reale* uitspraak ook *real* waar. Want stel dat *I* consistent is en dat niet elke instantie van $f(x) = 0$ *real* bewijsbaar is, dat wil zeggen stel dat $f(k) \neq 0$ real bewijsbaar is voor een zekere k. De functie f is berekenbaar en dus kan $f(k) \neq 0$ ook in het systeem *I* bewezen worden. De formule $f(x) = 0$, gegeven $x \in N$, heeft door middel van substitutie uiteraard $f(k) = 0$ als gevolg in *I* en wij hebben een *tegenspraak*. Dus: als het ideale systeem I consistent (vrij van tegenspraak) is, dan zijn ideaal afleidbare reale uitspraken ook real waar. *The verifiable consequences do indeed check out*.

Door deze observatie is het grondslagenvraagstuk tot een *wiskundig* probleem teruggebracht. Het is (slechts!) nodig om te bewijzen dat het ideale systeem *I* consistent is. Inhoudelijke overwegingen doen er dan verder niet toe! Hilberts aanpak is voor een professionele wiskundige uiteraard zeer aantrekkelijk. Om de grondslagen veilig te stellen, hebben wij filosofie noch betekenisanalyse nodig. Het volstaat om een zuiver *wiskundige* stelling te bewijzen, namelijk dat het onmogelijk is de tekencombinatie $0 \neq 1$ af te leiden vanuit de gegeven inhoudsloze axioma's volgens de formele regels van het formele systeem *I* voor de hogere wiskunde. Dergelijke *onmogelijkheidsresultaten* zijn goed bekend in de wiskunde, bijvoorbeeld de onmogelijkheid om de hoek in drieën te delen of de onmogelijkheid om vergelijkingen van graad vijf en hoger op te lossen door middel van worteltrekken. *Reale* consistentiebewijzen werden dan ook gegeven voor verschillende deelsystemen door Ackermann, Von Neumann en Jaques Herbrand. Het leek slechts een kwestie van tijd voordat Hilberts droom werkelijkheid zou zijn.

De situatie rond 1930 in de grondslagen van de wiskunde kan met betrekking tot de verschillende standpunten betreffende inhoudelijke rechtvaardiging en klassieke logica in een zo genoemde 'frietsnijder' weergegeven worden:

Inhoud in de grondslagen van de wiskunde rond 1930

	Klassieke logica	
	Aanvaarding	Verwerping
Taal met inhoud	Logicisme (Frege, Carnap) ↓ ↓	Intuïtionisme (Brouwer)
Taal zonder inhoud	Formalisme (Hilbert)	

De interventie van Gödel

Op het hierboven reeds vermelde neo-positivistische congres in Koningsbergen, waar Carnap, Heyting en Von Neumann een beroemde rondetafelsessie gaven over de grondslagenproblematiek, liet de 24-jarige Kurt Gödel – in de woorden van de Finse neopositivist Eino Kaila, 'een jongeling van onaanzienlijk uiterlijk, maar met opmerkelijke ogen' – een bom afgaan onder de grondslagenaspiraties van de voorafgaande generatie. Gödel, geboren in Brno, had in Wenen wiskunde gestudeerd en had via zijn promotor Hans Hahn toegang tot Schlicks *Wiener Kreis*. Desondanks aanvaardt hij niet de dogma's van de empiristen. De (meta)logische elementen leerde Gödel van Carnap en uit het tekstboek van Hilbert-Ackermann. Colleges van Hahn (over reële functies) en Phillip Furtwängler (over getallentheorie) gaven hem de wiskundige werktuigen die nodig waren voor zijn werk dat verscheen in februari 1931, de schriftelijke neerslag van zijn presentatie op het congres. Daar liet Gödel in detail zien hoe, gegeven een voldoende sterke en *consistent verondersteld*e axiomatisering A van de rekenkunde, het mogelijk is om een real formule φA *expliciet* aan te geven zodat φA niet bewijsbaar is in het systeem A, maar waar met inhoudelijke middelen, buiten het systeem A om, ingezien kan worden dat de *reale* rekenkundige propositie die φA uitdrukt waar is.

Hiermee is het logicisme van Frege weerlegd. *Ieder* voldoend sterk formeel systeem bevat noodzakelijk hiaten, onafhankelijk van de vraag of het systeem inhoudelijk gerechtvaardigd is, zij het door middel van een logicistische reductie, zij het op andere wijze, of niet. (Voldoende sterk betekent hier zoiets als 'kan de waarden van berekenbare functies uitrekenen' of 'bevat tenminste Hilberts *reale* wiskunde'.) Omdat de reductie plaatsvindt naar een formeel systeem dat *eo ipso* voldoende sterk moet zijn – de theorie van berekenbare functies is immers een deel van de rekenkunde – blijkt dat wij ook hier rekenkundige waarheden zullen overslaan, of dat wij vervallen in inconsistentie, waardoor *a fortiori* alle rechtvaardiging ontbreekt.

Ook Hilberts grondslagenprogramma gaat ten onder. De Gödelformule φA is *real* en tevens *waar*, maar desalniettemin is zij niet afleidbaar zelfs in het ideale systeem A (dat de reale middelen omvat). De ware *reale* zin φA is derhalve niet real bewijsbaar en het hilbertiaanse *conservatismeprogramma* faalt.

De gewenste fundering is niet te leveren: klassieke wiskunde blijft op puur geloof berusten, wat een aantal cruciale punten betreft. In later, maar even belangrijk werk in de fundamenten van de geformaliseerde verzamelingenleer, heeft Gödel laten zien dat de consistentieproblematiek niet altijd hopeloos is: de mogelijkheid voor relatieve consistentiebewijzen blijft open. Een relatief consistentiebewijs laat niet zien dat een theorie absoluut consistent is, maar slechts dat een theorie consistent is gegeven de consistentie van een andere. Zodoende heeft Gödel bewezen dat het keuzeaxioma (zie hoger) consistent is, gegeven de consistentie van de gebruikelijke verzamelingenleer volgens Zermelo, Fraenkel en Skolem. Zijn bewijsmethode is een vertrouwde methode vanuit de niet-Euclidische meetkunde (zie eveneens hoger): een *interne* modelconstructie van de ene theorie in de andere.

John von Neumann, één van de grootste wiskundigen van de twintigste eeuw heeft Gödel geprezen met de woorden: 'Kurt Gödels bijdrage aan de moderne logica is uniek en monumentaal. Zij is een landmerk dat lang in ruimte en tijd zichtbaar zal blijven.' Tegen een arts die Gödel behandelde, formuleerde een geleerde in Princeton, waar Gödel vanaf 1940 aan het *Institute for Advanced Study* werkzaam was, het nog bondiger: 'Geloof het of niet, dokter, maar daar hebben wij de grootste logicus sinds Aristoteles.' 'Se non è vero, è ben trovato'. De mogelijke rivalen zijn er slechts twee of drie: een Bernard Bolzano, een Gottlob Frege of misschien een Alfred Tarski.