

Minister de Reus Magnificus,

Mijn Heer Bestuurders van deze Universiteit,

Minister de Secretaris van de Universiteit,

*Dames en Heren van het wetenschappelijk corps en van het onderwijsraad
geëminent,*

Dames en Heren Studenten,

OORDEEL EN GEVOLGTREKKING

Een geschiedkundig document

BEDREIGDE SPECIES ?

"I hold that logic is a *bedreigde species*". Zo formuleerde Bertrand Russell zijn filosofie van de logica. Maar wat is dit begrip? Een traditionele omschrijving van de logica leidt de kunst en de wetenschap van het juist redeneren. Ondanks het feit dat de randaal van de logica in de wijsbegeerte aanvaard is, in het bijzonder de wijsbegeerte van de logica en haar geschiedenis sinds de Grieken, moet de Russell eigenlijk geven wanneer wij zijn creatie van de logica als een *bedreigde species* van de filosofie. De formulering van de logica is een *bedreigde species*.

REDE

Uitgesproken bij de aanvaarding van het

ambt van gewoon hoogleraar in de Wijsbegeerte,

in het bijzonder de Wijsbegeerte van de Logica,

aan de Rijksuniversiteit te Leiden

op vrijdag 9 september 1988 door

dr. B. G. Sundholm



1988

RIJKSUNIVERSITEIT TE LEIDEN

Mijnheer de Rector Magnificus,
Mijne Heren Bestuurders van deze Universiteit,
Mijnheer de Secretaris van de Universiteit,
Dames en Heren van het wetenschappelijk corps en van het ondersteunend
personeel,
Dames en Heren Studenten,
En voorts Gij allen die door Uw aanwezigheid blijk geeft van Uw
belangstelling,
Zeer gewaardeerde toehoorders,

"I hold that logic is what is fundamental in philosophy"¹. Zo formuleerde Bertrand Russell zijn filosofisch *credo*. Hoe moeten wij dit begrijpen? Een traditionele omschrijving van de logica luidt: de kunst en de wetenschap van het juist redeneren. Ondanks het feit dat ik vandaag een leerstoel in de wijsbegeerte aanvaard, in het bijzonder de wijsbegeerte van de logica en haar geschiedenis sinds de middeleeuwen, moet ik Russell ongelijk geven wanneer wij zijn *credo* lezen als een wezensdefinitie van de filosofie. De formule

wijsbegeerte = logica,

hoe aantrekkelijk die ook mag zijn voor de logicus, is gewoon te eng om recht te doen aan de rijke veelzijdigheid van de wijsbegeerte. Filosofie omvat meer dan alleen de studie van gevolgtrekkingen en dat had Russell zelf ook wel toegegeven. Een meer realistische interpretatie van zijn *credo* blijkt mogelijk te zijn wanneer wij reflecteren over de verhouding tussen enerzijds de denkakten waarmee wij gevolgtrekkingen voltooien en anderzijds de taal; het lijkt nauwelijks mogelijk om greep te krijgen op het denken anders dan via de taal. De Britse filosoof Michael Dummett heeft gesuggereerd dat het karakteristieke kenmerk van de analytische wijsbegeerte is, dat "philosophy of thought" afhankelijk is van "philosophy of language" en niet andersom². Tegen deze achtergrond is het natuurlijk om Russells *credo* te zien als een uitdrukking van wat de Amerikaanse filosoof Gustav Bergmann noemt, "the linguistic turn in philosophy"³. Deze wending houdt in dat wijsgerige vraagstellingen - en niet alleen die omtrent het denken - primair benaderd worden via de taal. Bijvoorbeeld, een vraag naar wat er is in de wereld of naar wat wij ervan kunnen weten kan dan omgezet worden in een vraag naar de juiste logische vorm van de volzinnen waarmee wij spreken over de wereld. Zoals bekend heeft deze analytische, taal georiënteerde opvatting veel filosofisch terrein gewonnen in het angelsaksisch taalgebied en in Scandinavië. Binnen deze analytische richting is Russell dan ook één van de sleutelfiguren.

Een derde lezing van zijn *credo* wordt fraai geïllustreerd in het eerste, zeer door Russell geïnspireerde hoofdwerk van de Wiener Kreis-filosof Rudolf Carnap. Zijn *Logische Aufbau der Welt* neemt Russell's type-theorie als uitgangspunt. Op de zuiver logische basis van de type-theorie - met slechts één empirische notie - meent Carnap een volledige opbouw van de wereld te kunnen geven. Hier is echt sprake van logica als fundament. Nu, 60 jaar later, zien we dergelijke ondernemingen nog maar zelden. Binnen de huidige wijsbegeerte is de logica fundamenteel in een meer bescheiden zin: zij wordt als een vanzelfsprekende achtergrond verondersteld. Kennis van de moderne predikatenlogica is gewoon een *sine qua non* voor het kunnen volgen van een algemeen (analytisch-)filosofisch vaktijdschrift.

De Zweeds-Finse filosoof Georg-Henrik von Wright merkt terecht op dat

När man i framtiden skriver det tjugonde seklets idéhistoria, kommer med all sannolikhet logikens storartade uppsving ... att framstå som ett av de intressantaste dragen i tidsbilden.⁴

(Wanneer men in de toekomst de ideeëngeschiedenis van de twintigste eeuw schrijft, zal de opkomst van de logica ... zeer waarschijnlijk als een van de meest interessante verschijnselen van deze periode naar voren komen.)

Wanneer we naar de huidige resultaten van deze opkomst kijken, zien we iets opmerkelijks. De twee, traditioneel gezien, zo centrale logisch-filosofische begrippen, oordeel en gevolgtrekking spelen nauwelijks nog een rol in de logische wetenschap van vandaag. Met name het idee dat een logisch gevolg tot stand komt door een denkend subject (de "gevolgtrekker") die een geldige akte van gevolgtrekking voltooit, schittert door afwezigheid. In het resterende gedeelte van mijn betoog wil ik dan ook een historische schets geven van de ontwikkeling die geleid heeft tot het negeren van de "gevolgtrekker".

Volgens de Amerikaanse logicus Quine is de logica "an old subject and since 1879 it has been a great one"⁵. Het is zeker waar dat de logica een oude wetenschap is: zij bestaat 2300 jaar en dit mag men een behoorlijke leeftijd noemen. Toch vind ik dat ook vóór 1879 - het jaar waarin het *Begriffsschrift*⁶ van de Duitse wiskundige Gottlob Frege verschijnt - de logica groots was. Voor mijn thema van vanmiddag is het jaar 1879 wel van belang, maar de beslissende stap op weg naar een logica zónder "gevolgtrekker" wordt genomen in 1837. Toen verscheen de

*Wissenschaftslehre*⁷, een groot werk in vier banden van 2400 pagina's, van de Böhmmische godsdienst-filosoof Bernhard Bolzano.

In detective-verhalen wordt niet zelden gesproken over de "glasheldere logica" van de geniale detective, maar de logische lezer wordt vaak nogal teleurgesteld. Bij Bolzano zal dit echter niet het geval zijn; de omschrijving "glashelder" is zeer goed van toepassing op zijn stijl en presentatie. Hij schuwt geen moeite om de materie zo duidelijk mogelijk te maken; voorgangers worden vermeld, geanalyseerd en geëvalueerd; mogelijke tegenwerpingen worden geanticipeerd. De Zweedse filosofie-historicus Anders Wedberg heeft gelijk wanneer hij vaststelt dat het niet alleen een grote intellectuele ervaring is om de *Wissenschaftslehre* te lezen maar ook een morele⁸.

De traditionele oordeelsleer waartegen Bolzano zich heeft verzet, was gangbaar tijdens een zeer lange periode in de geschiedenis van de logica: vanaf Aristoteles tot Kant en zijn opvolgers onder de Duitse idealisten. Een volledige beschrijving van Bolzano's vernieuwing van de logica vraagt dan ook om een zorgvuldige uiteenzetting van de traditionele leer. In een beknopt betoog zoals het mijne is dit vanzelfsprekend niet mogelijk. Ik ben daarom blij dat ik in de gelukkige positie verkeer dat mijn voorganger in deze leerstoel, Professor Gabriël Nuchelmans, precies zo'n uiteenzetting heeft gegeven in zijn grote trilogie over de propositie- en oordeels-opvattingen⁹.

Het fundamenteel van Bolzano's logica is zijn gebruik van een centraal sleutelbegrip, dat hij met een Kantiaans aandoende term *Satz an sich* noemde. Wat zijn deze *Sätze an sich*? Hierop geeft Bolzano geen volledig antwoord. Wel omschrijft hij een aantal taken die deze *Sätze* horen te vervullen. Verder heeft hij veel te zeggen over wat zij niét zijn en in welke categorieën zij niét thuishoren. Deze onbepaaldheid van de *Sätze an sich* is geen reden om Bolzano's theorie van de logica onmiddellijk te verwerpen. Niet alles kan immers verklaard of gedefinieerd worden omdat men dan terecht komt in een oneindige regressie van betekenisverklaringen. Iedere theorie, ook een theorie van de logica, moet een aantal begrippen als primitief hanteren.

Om een verdere kennismaking met de *Sätze an sich* mogelijk te maken, wil ik nu hun taken en negatieve omschrijvingen kort weergeven. Sommige tekens van inkt op papier, of geluidsgolven in de lucht, zijn instanties van herkenbare betekenisvolle vormen die wij volzinnen kunnen noemen. Deze volzinnen drukken een bepaalde betekenis uit en wat zij uitdrukken hoort thuis in de categorie *Satz an sich*. Iets soortgelijks geldt ook omtrent ons denken. Wat wij denken in een denkakte, de

inhoud van de gedachte, is een *Satz an sich*. Verder zijn de *Sätze an sich* de dragers van waarheid en onwaarheid. Weliswaar is er in de wijsbegeerte soms sprake van waarheid van oordelen, gedachten of volzinnen. Zelfs de inktvlekken waarmee een ware volzin geschreven is, worden in sommige discussies ook voor waar gezien. Voor Bolzano zijn deze waarheidsbegrippen allemaal secundair en horen afgeleid te worden. Waarheid komt in eerste instantie toe aan *Sätze an sich*. Het is belangrijk om te benadrukken dat deze drie taken, t.w. die van oordeelsinhoud, gedachteinhoud en drager van waarheid geen definities geven van de *Sätze an sich*. Deze *Sätze* zijn inderdaad de dragers van waarheid maar zij zijn niet als zodanig gedefinieerd.

Sommige *Sätze an sich* zijn in de taal uitgedrukt d.m.v. volzinnen. Dus drukt de zin " $18 + 9 = 20$ " de (onware) *Satz an sich* uit dat $18 + 9 = 20$. Deze eigenschap is incidenteel; een *Satz an sich* veronderstelt volgens Bolzano geen enkele *Setzung* door een handelend subject en hoeft daarom in de taal niét uitgedrukt te zijn. In dit verband moet opgemerkt worden dat de *Satz an sich* niet gelijk is aan de inktvlekken op papier, noch aan de volzin zelf. Integendeel, er is zelfs sprake van een categoriaal onderscheid. De *Sätze an sich* hebben geen fysieke aspecten, zij zijn causaal inert en eeuwig in de zin van tijdloos. Hun bestaan is niet materieel noch psychisch. Volgens de wat ongelukkige terminologie van Frege horen zij thuis in "ein drittes Reich". Vanwege de niet-reële, of ideale, aspecten van hun bestaan wordt de link met Plato gelegd. Bolzano wordt dan ook soms "logisch platonist" genoemd. Bolzano's waarheidsopvatting vertoont dezelfde trekken als zijn leer van de *Sätze an sich*. Iedere *Satz an sich* is waar of onwaar, volstrekt onafhankelijk van onze kennis hiervan. Ook waarheid is *An-sich*. Door middel van deze twee begrippen, *Satz* en *Wahrheit an sich*, laten zich dan ook andere logische noties definiëren. In een oordeelsakte bijvoorbeeld, wordt waarheid toegekend aan een *Satz an sich* Q. Het gevelde oordeel is dan dat waarheid aan Q toekomt. Waarheid van *Sätze*, correctheid van gevelde oordelen en geldigheid van oordeels- of ken-akten kunnen wij dan systematisch met elkaar verbinden. Laat ons zeggen dat een ken-akte geldig is als het desbetreffende gevelde oordeel correct is. Een gevelde oordeel, dat Q waar is, is korrekt als de *Satz an sich* Q daadwerkelijk een *Wahrheit an sich* is.

Nu hebben we een punt bereikt waar Bolzano's breuk met de traditie duidelijk kan worden. De oordeelsvorm bij Bolzano is, zoals gezegd,

Q is waar,

d.w.z. waarheid komt toe aan de inhoud Q, waar Q een *Satz an sich* is.

De traditionele logica, in haar verschillende vormen, gaat uit van de klassieke oordeelsvorm

S is P.

Hier wordt niét waarheid toegekend aan een *Satz an sich*, maar hier vindt een vergelijking plaats tussen twee termen, het logisch subject en het logisch predikaat.

Bolzano zet zijn leer over het logische *An-sich* ook door op micro-niveau. De *Sätze an sich* hebben componenten die *Vorstellungen an sich* heten. Deze laatste term doet nogal paradoxaal aan. Bij een *Vorstellung* is het natuurlijk om te denken in termen van een handelend subject, de "voorsteller", wiens *Vorstellung* gericht is op een object. Wat de *Vorstellungen an sich* betreft, geldt dat zij over het algemeen objectgericht zijn. Toch zijn zij, zoals alle *An-sich* noties, volstrekt subject-onafhankelijk.

Bolzano meent dat er m.b.t. de *Sätze an sich* een zekere standaardvorm bestaat, namelijk

A heeft b.

Laat me een voorbeeld geven:

De robijn heeft roodheid.

Hier, in de interne structuur van de *Satz an sich*, eerder dan in de oordeelsvorm, komt de aristotelische S is P vorm terug. Alleen wordt het gebruik van het *concretum* "rood" in het aristotelische oordeel

De robijn is rood

vervangen door gebruik van het *abstractum* "roodheid". Via zijn standaardvorm is Bolzano in staat om waarheid te definiëren voor zijn *Sätze an sich*. Een *Satz an sich* met als standaardvorm A heeft b, is waar als de eigenschap die het object is van de predikaat-*Vorstellung an sich* b ook daadwerkelijk van toepassing is op het object van de *Vorstellung an sich* A. De geschoolde logicus zal hier onmiddellijk de verwantschap met Tarski's beroemde adequaatheids-criterium herkennen¹⁰.

Bolzano definieert ook een aantal eigenschappen en relaties binnen de *Sätze an sich*. Bijzonder belangrijk zijn hier de gevolgrelaties. Bij een *gevolgtrekking* wordt een stap genomen van één of meerdere oordelen, de premissen, naar een oordeel, de conclusie van de desbetreffende gevolgtrekking. Bolzano's gevolgrelaties hebben niet oordelen maar *oordeels-inhouden*, d.w.z. *Sätze an sich*, als *relata*. De geldigheid van de gevolgtrekking naar de conclusie Q_2 is waar, vanuit de premisse Q_1 is waar, wordt dan teruggevoerd naar het bestaan van een gevolgrelatie tussen de inhouden Q_1 en Q_2 van de desbetreffende gevelde oordelen. Ook hier vinden wij een volledige subject-onafhankelijkheid. Deze reductie is in

wezen niet verschillend van de reductie van de geldigheid van de kenakte naar de waarheid van de *Satz an sich* die de inhoud is van het gevelde oordeel. Ik geef daarom geen details, maar volsta met de vermelding dat Bolzano's definitie van logisch gevolg een tweede anticipatie van Tarski vormt.

Bolzano's motief voor het schrijven van een logica-leerboek in vier banden was eerder theologisch dan logisch. Wanneer wij helder willen kunnen denken over de moeilijkste vragen omtrent godsdienst en theologie, dan moeten wij ons volgens Bolzano laten leiden door een correcte denkleer of logica. Zijn werkzaamheden binnen de logica zijn dan ook in zekere zin een voorbereiding voor zijn godsdienstfilosofie. Vermeld mag worden dat het zelfstandig denken van de priester Bolzano hem in hevig conflict bracht met de kerkelijke hiërarchie en met de politieke macht in het zeer klerikale Oostenrijk van keizer Franz I.

Door zijn leer van het logische *An-sich* is Bolzano de grondlegger van de nieuwe stroming binnen de wijsbegeerte, die gekenmerkt wordt door logisch objectivisme en anti-psychologisme. (Onder psychologisme wordt hier verstaan de opvatting dat de logische wetten in feite psychologische wetten over hoe wij daadwerkelijk denken zijn.) Belangrijke filosofen in deze objectivistische traditie zijn Franz Brentano - nog een priester in conflict met de klerikale autoriteiten - en zijn leerlingen Husserl, Stumpf en Meinong. De Duitser Hermann Lotze en de door hem beïnvloede Frege horen beiden in deze stroming thuis. Ook Wittgensteins *Tractatus* mag als een werk uit deze school beschouwd worden. Bijna al deze filosofen volgen Bolzano in het gebruik van de *Sätze an sich*, alhoewel de terminologie en de precieze uitwerking van hun theorieën variëren. (Meinong, bijvoorbeeld, noemt de *Satz an sich* een "*Objektiv*"¹¹.) Verder gebruiken zij niet de aristotelische oordeelsvorm S is P. Evenals Bolzano vinden zij dat het oordeel een bepaalde eigenschap, zij het waarheid, zij het bestaan, toekent aan een inhoud.

Van de filosofen in deze traditie heeft zonder twijfel Frege de grootste invloed gehad op de ontwikkeling van de logica en zijn rol wordt dan ook vergeleken met die van Aristoteles. Zijn werk vertoont typische trekken van deze traditie: fel anti-psychologisme en handhaving van de karakteristieke oordeelsvorm. In vergelijking met Bolzano bestaat bij Frege de vernieuwing vooral uit zijn uitvinding van een formele symbolen-taal. Zijn *Begriffsschrift* is met wiskundige exactheid opgesteld. Aan het gebruik van deze taal koppelt Frege een *formeel* bewijs-begrip. Een formeel bewijs is een bewijs dat zijn geldigheid ontleent aan het feit dat het opgebouwd is volgens bepaalde formele regels. Maar Frege laat het

niet bij de zuiver formele kant van zijn *Begriffsschrift*. In zijn boek *Grundgesetze der Arithmetik* (1893) doet hij ook recht aan de inhoudelijke betekenisverklaringen die het gebruik van zijn bewijs-regels zal rechtvaardigen. Zijn (over-)bekende leer van de *Sinn und Bedeutung*¹² van de uitdrukkingen in een taal is in feite een bijdrage aan deze betekenisverklaringen. Deze leer vertoont grote overeenkomst met Bolzano's leer van het logische *An-sich* ondanks het verschil dat Frege's leer vanzelfsprekend niet volledig taalonafhankelijk kan zijn: de *Sinn* van een uitdrukking is immers de *Sinn* van een uitdrukking in een taal. De *Sinn* van een volzin, wat Frege een *Gedanke* noemt, is een *Satz an sich*. Deze overeenkomst gaat ook op voor het micro-niveau. De *Sinn* van een singuliere term (Fregeaanse *Eigenname*) is een *Vorstellung an sich* en de *Bedeutung* van de term is dan het object van de desbetreffende *Vorstellung*. Analoge verhoudingen gelden voor de begripwoorden.

Frege heeft zijn logica opgezet als deel van een logicistisch reductieprogramma voor de wiskunde. Zijn bedoeling was, ten eerste, om wiskundige begrippen te definiëren in termen van zuivere logica zodat, ten tweede, wiskundige stellingen omgezet worden in logische waarheden. (In dit verband is zijn formeel bewijs-begrip van groot belang.) Het programma faalt om diverse redenen maar zijn logisch stelsel is van blijvende waarde. Frege wilde niet alleen de wiskunde reduceren naar de logica. Zijn logica is ook zeer mathematisch van aard. Waar Bolzano de standaardvorm A heeft b gebruikte voor zijn *Sätze an sich*, introduceert de hoogleraar in de wiskunde Frege hier de wiskundige functie/argument structuur. Zijn *Gedanken* zijn dan in de eerste instantie van de vorm

$P(a)$,

d.w.z. zij zijn het resultaat van het toepassen van een propositionele functie op een *Gegenstand*-argument.

Door bemiddeling van Russell en Moore heeft de *Satz an sich* burgerrechten gekregen, ook binnen de angelsaksische analytische stroming. Russell gebruikte de termen "assertion" en "proposition" voor Frege's "Urteil" en "Gedanke"¹³. Hierdoor kreeg de zwaarbeladen term "proposition" er nog een betekenis bij. Het is daarom geboden bijzonder nauwkeurig te werk te gaan bij het lezen van Britse logici vanaf ca. 1850. Is de propositie een oordeel, een oordeelsinhoud of een volzin waarmee, bijvoorbeeld, een oordeel wordt uitgedrukt? Vast staat dat Russell in zijn *Principia Mathematica*¹⁴ van 1910 de objectivistische traditie aanhoudt: in een "assertion" wordt een propositionele inhoud, die de functie/argument structuur heeft, bevestigd.

Vanaf Bolzano's *Wissenschaftslehre* tot Russells manuscript *Theory of*

Knowledge (1913)¹⁵ is de objectivistische traditie binnen de logica duidelijk kentheoretisch georiënteerd. Zij is zich zeer bewust van de logica als een kentheoretisch instrument en men zou zelfs kunnen spreken van een *epistemologica*.

In de objectivistische traditie wordt veel aandacht besteed aan de inhoudelijke aspecten van de logica. Het feit dat Bolzano het niet laat bij het gebruik van alleen objecten, maar ook *Vorstellungen an sich* hanteert is hiervan een mooi voorbeeld. Hetzelfde geldt voor Husserls gebruik van de beide begrippen *Sachverhalt* ("stand van zaken") en oordeelsinhoud. Frege's formele symbolen-taal is niet louter formeel, maar wordt van inhoud voorzien d.m.v. zorgvuldige betekenisverklaringen: een *Begriffsschrift*-formule drukt iets uit, heeft een betekenis. Als laatste voorbeeld kunnen wij Russells "*no-class theory*" noemen. Volgens deze theorie kan het gebruik van verzamelingen gemeden worden. In plaats van verzamelingen werkt men met de (inhoudelijke) propositionele funkties die intuïtief gezien de verzamelingen definiëren.

Parallel met de inhoudelijke epistemologica van de objectivistische traditie, loopt er in de tweede helft van de negentiende eeuw een andere ontwikkelingslijn binnen de logica en wiskundige axiomatiek, die inhoudelijke aspecten hoofdzakelijk negeert. Belangrijke namen hier zijn Boole, Schröder en Hilbert. De Britse mathematicus George Boole opent deze lijn in 1847 met zijn boekje *The Mathematical Analysis of Logic*. Hij benadert de logica via een formele calculus, d.w.z. een ongeïnterpreteerde "rekenmethode". In zijn inleiding geeft hij een fraaie karakterisering van de aard van een formele symbolen-calculus. Naar aanleiding van recente ontwikkelingen in de algebra merkt hij op dat

the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics.¹⁶

Boole's eigen calculus vertoont juist deze trekken. Hij kan gezien worden als een elementaire klassentheorie of als een propositie-logica,

afhankelijk van hoe men de variabelen van de calculus interpreteert. (Andere interpretaties zijn ook mogelijk.) Het verschil met Frege's formele *Begriffsschrift* kon niet groter zijn. Daar is geen sprake van een ongeïnterpreteerde calculus; integendeel, er is één vaste interpretatie van de formele taal.

Schröder geeft in zijn werk een meer omvangrijke *Algebra der Logik*¹⁷, maar blijft in hoofdzaak binnen het paradigma van Boole. Zowel Frege als Husserl uitten felle kritiek op Schröder, met name op zijn niet-inhoudelijke, of ook *extensionele*, opvatting van de logica¹⁸. In wezen dezelfde calculus-opvatting paste David Hilbert toe in zijn beroemde uiteenzetting van de grondslagen van de meetkunde. Informeel merkte hij in een gesprek *en passant* op dat "men altijd, in plaats van punten, lijnen en vlakken, moet kunnen spreken van tafels, stoelen en bierglazen"¹⁹. Slechts de onderliggende verhoudingen zijn van belang voor de meetkunde. Wát een punt is, is volgens Hilbert onbelangrijk. Dat twee punten in een vlak precies een lijn bepalen is daarentegen essentieel. In de *Bierstube*-interpretatie wordt dit zoiets als: elke twee glazen op een tafel bepalen precies een stoel. Hilbert vond dat de meetkundige axioma's *impliciete definities* geven van de meetkundige begrippen. Deze opvatting werd fel bestreden door Frege in een reeks polemische artikelen²⁰.

In de negentiende eeuw vindt men in de wiskunde een drang naar precisie en helderheid in de bewijsvoeringen. Cauchy en Weierstrass hebben het vakonderdeel analyse gereformeerd. Definities van reële getallen zijn gegeven door Cantor, Dedekind en Weierstrass. Cantors verzamelingenleer biedt in de latere periode de mogelijkheid tot een uniforme grondslag van de wiskunde. In het eerste decennium van onze eeuw ontstaat dan een *Grundlagenkrise*. Deze crisis is in hoofdzaak aan twee omstandigheden te wijten. Ten eerste ontdekten, onder anderen, Cantor, Burali-Forti, Russell en Zermelo een aantal zeer elementaire tegenspraken in de fundamenteën van de verzamelingenleer, waardoor de grondslagen van de wiskunde onzeker raakten. Ten tweede heeft Zermelo's gebruik van het "keuze-axioma" hevige discussie teweeggebracht. Het keuze-axioma staat ons toe om precies één koekje te kiezen van iedere soort in een koekjestrommel. Dit lijkt vanzelfsprekend en is het ook. Het probleem is alleen dat men in de wiskunde soms trommels met oneindig veel soorten nodig heeft.

De reacties op deze ziekte van de klassieke wiskunde waren verschillend. Bertrand Russell ondernam een therapeutische poging, gebaseerd op een modificatie van Frege's logicisme, maar zijn theorie omvat veel *ad hoc* oplossingen en is nooit volledig aanvaard. Voor de

Nederlander Brouwer stond vast dat de ziekte ongeneeslijk was en hij wijst iedere poging tot therapie af. Hiertegenover plaatst hij een radicale reconstructie, gefundeerd op een aanvaardbare, "intuitionistische" basis. Het is opvallend dat veel van de meest vooraanstaande mathematici sterke belangstelling koesterden voor de grondslagenkwesties: Brouwer, Weyl, Poincaré en, natuurlijk, Hilbert zijn hiervan goede voorbeelden.

Hilbert voelde niets voor een intuitionistische reconstructie van de wiskunde, mede omdat hij zijn faam verworven had door het gebruik van bewijs-methoden die volgens de intuitionisten niet door de beugel konden. In zijn reactie op de *Grundlagenkrise*, en op de dreiging die hij ervoer van het intuitionisme van Brouwer, bouwde hij op een geniale manier voort op zijn eerdere opvattingen omtrent inhoudsloze axiomatiek.

De paradoxale tegenspraken binnen de verzamelingenleer stelden de wiskunde voor de taak om te bepalen welke van haar delen consistent waren, d.w.z. vrij van tegenspraak. Het idee van een consistentie-bewijs was bekend uit de meetkunde. Door geschikte herinterpretatie van de niet-euclidische grondbegrippen kan men een *model* van de niet-euclidische axioma's geven binnen de euclidische meetkunde. Een niet-euclidische tegenspraak zou dan, via de herinterpretatie, moeten terugkeren in de euclidische meetkunde. Wij hebben hier een *relatief* consistentie-bewijs: als de euclidische meetkunde consistent is, dan is ook de niet-euclidische meetkunde consistent. De euclidische meetkunde, op haar beurt, kan via een Cartesiaans coördinaten-stelsel geïnterpreteerd worden binnen de rekenkunde van de reële getallen, en wij hebben weer een relatief consistentie-bewijs.

De zaak ligt echter anders voor wat betreft de rekenkunde van de natuurlijke getallen. De modelmethode lijkt hier nauwelijks toepasbaar. Binnen welke theorie zou men het model kunnen geven? Hilbert geeft in zijn oplossing van dit probleem de modelmethode op en poogt een *direct* consistentie-bewijs te geven. De oplossing vloeit voort uit zijn eerder inzicht dat formele axiomatiek, strikt genomen, *zonder inhoud is*. Een welgevormde formule in een formele taal is niets anders dan een reeks van *formele tekens*²¹ en deze "tekens" hebben geen inhoud. Hilbert formuleert het zo:

Ganz entsprechend wie beim Übergang von der inhaltlichen Zahlenlehre zur formalen Algebra betrachten wir die Zeichen und Operationssymbole des Logikkalküls losgelöst von ihrer inhaltlichen Bedeutung.²²

en

Diese Zahlzeichen ... haben aber sonst keinerlei Bedeutung.²³

Een formeel bewijs is niets anders dan een bepaalde structuur van (inhoudsloze) welgevormde formules. Het formele axiomatische systeem kan gezien worden als een machine die welgevormde formules produceert. Een direct consistentie-bewijs kun je dan geven door te laten zien dat een tegenspraak niet geproduceerd kan worden door het rekenkundig formalisme. Zo'n bewijs moet gegeven worden binnen een inhoudelijke *metamathematica*, terwijl de rekenkunde zelf inhoudsloos blijft. Hilbert zegt:

...es ist konsequent, wenn wir jetzt auch den logischen Zeichen ebenso wie den mathematischen die Bedeutung absprechen und erklären, dass auch die Formeln des Logikkalküls für sich allein keinerlei Bedeutung haben...²⁴

In zijn leer, die hij *Beweistheorie* noemde, paste Hilbert zijn formele axiomatiek toe op de logica zelf. Hierdoor verdween een aantal logische begrippen uit de theorievorming. In plaats van *proposities* gebruikt men de formules als formalistisch substituut. Deze welgevormde formules dienen verder als eindformules van de formele bewijsbomen en dus zijn zij ook de formalistische tegenhangers van *oordelen*. Formalistisch gezien maakt men geen onderscheid tussen oordelen en hun inhoud. Het teken " $\vdash$ " dat door Frege²⁵, Russell²⁶ en Heyting²⁷ als een assertie-indicator werd gebruikt, staat in de metamathematische traditie voor een wiskundig bewijsbaarheids-predikaat dat van toepassing is op welgevormde formules. De uitdrukking " $\vdash P$ " betekent dan hier "er is een formeel bewijs met P als laatste component". Dit is gewoon een wiskundige uitspraak die waar of onwaar kan zijn, maar geeft niet aan dat een akte van assertie voltooid is. Een regel zoals *modus ponens* luidt inhoudelijk: gegeven dat het oordeel gevelde is: de propositie dat als A dan B is waar, en dat het oordeel gevelde is: de propositie A is waar, dan mag men het oordeel vullen: de propositie B is waar. Bij Hilbert, aan de andere kant, vinden wij zoiets als: "wanneer de welgevormde formules $P \Rightarrow Q$ en P beide formeel bewijsbaar zijn, dan is ook de welgevormde formule Q formeel bewijsbaar". Bij Frege is er sprake van een gevolg dat getrokken mag worden uit de oordelen die als premissen dienen, maar bij Hilbert vindt men geen gevolgtrekking maar een metamathematische stelling.

Hier zijn dan de proposities, oordelen en gevolgtrekkingen uit de logica verdwenen. Door Hilberts toepassing van de wiskundige axiomatiek

zijn zij verbannen. Het lot van de inhoudsloze formules is wonderlijk en niet zonder ironie. Ongeïnterpreteerde formele "talen" komen we tegen in de grondslagen van de wiskunde als gevolg van Hilberts programmatische visie over hoe men de *Grundlagenkrise* kan oplossen. Door het idee van inhoudsloze formules in *absurdum* door te voeren, en de formules zelfs in getallen om te zetten, lukt het Gödel om het Hilbert-programma te weerleggen²⁸. Wij hebben dan de ironische situatie dat de filosofie achter de inhoudsloze formules beslissend weerlegd is, terwijl de ongeïnterpreteerde talen gehandhaafd blijven.

Hilberts aanpak binnen de grondslagen van de wiskunde was zuiver syntactisch van aard en hij bewoog zich dus uitsluitend op het niveau van de formele tekens. Op een later tijdstip vinden wij een dergelijke syntactische aanpak ook binnen de wijsbegeerte van de logica terug. Dit was in zekere zin te verwachten vanwege het feit dat de logica sinds Frege gemathematiseerd is. Carnaps tweede hoofdwerk, *Logische Syntax der Sprache* (1934) is misschien het beste voorbeeld hiervan. Toch bleek dit syntactisch conventionalisme niet bijzonder aantrekkelijk en in tien jaar was het vergeten²⁹.

In plaats hiervan nam men weer de wiskunde als voorbeeld. De wiskunde werd in onze eeuw meer en meer structuralistisch³⁰. Het gaat niet zozeer meer om de precieze eigenschappen van deze of gene analytische functie, maar eerder om bijvoorbeeld de eigenschappen van alle "contracties" in een willekeurige "Banach-ruimte". Men is geïnteresseerd in de algemene eigenschappen van alle structuren die bepaalde axioma's vervullen. Dit wiskundig structuralisme dient als inspiratiebron voor de laatste verandering binnen de logica. De Pools-Amerikaanse logicus Alfred Tarski had een eigenschap van welgevormde formules gedefinieerd die een formalistische variant was van het waarheidsbegrip voor (inhoudelijke) proposities³¹. Na de tweede wereldoorlog werden de ideeën van Tarski verbonden met het wiskundig structuralisme en men spreekt vanaf dat moment over de waarheid van een welgevormde formule *binnen een bepaalde structuur*³². In deze "formele semantiek" worden welgevormde formules gekoppeld aan bepaalde toedrachten in de desbetreffende structuren. Dat een formule waar is in een bepaalde structuur houdt dan in, dat de toedracht, die gekoppeld is aan de formule, "bestaat" in de structuur. De logica krijgt hierdoor de rol van een soort *toedrachten-calculus*; een formele logische gevolgrelatie laat dan zien dat wanneer bepaalde toedrachten bestaan in een structuur, dan móét ook een zekere andere toedracht bestaan. Het bestaan van toedrachten is natuurlijk *An-sich* in de zin van Bolzano, maar men is

veel verder gegaan dan hij: door de objectieve aspecten eenzijdig te benadrukken is het handelend subject verdrongen uit de logica. De logica is niet meer een epistemologica; zij is een structuralistische *ontologica* geworden. Wittgenstein kan hier dienen als het vroegste voorbeeld; zijn *Tractatus* vertoont in veel opzichten trekken van een calculus voor het bestaan van *Sachverhalte*. In plaats van met Bergmann te spreken over een "linguistic turn" in de wijsbegeerte, is er binnen de logica eerder sprake van een "ontological turn".

Soms ondervindt een analytisch geschoolde moderne logicus onbegrip en wantrouwen van meer traditioneel opgeleide filosofen (en soms gaat het onbegrip wel de andere kant op.) Een reden hiervoor is natuurlijk dat modern logisch onderzoek nogal wiskundig-technisch van aard is. Een andere, m.i. even belangrijke reden, is de bovengenoemde verandering in de grondhouding tegenover de logica. De stap van een epistemologica naar een *ontologica* heeft stilzwijgend plaatsgevonden zonder dat men zich hiervan bewust is zowel binnen en buiten de kring der logici. Het is daarom geboden de grootste terughoudendheid in acht te nemen bij het toepassen van moderne formeel-semantische methoden op oudere logica.

In de taalfilosofie wordt met Charles Morris over *pragmatiek* gesproken³³. Hiermee bedoelt men het deel van de tekenleer, of ook *semiotiek*, dat de tekens in relatie tot de tekengebruikers bestudeert. Het gebruik van tekens in een assertie die een geveld oordeel tot uiting brengt is een passend onderwerp voor de pragmatiek. Een goede illustratie van hoever het handelend subject teruggedrongen is biedt het artikel "Pragmatics" van de vooraanstaande formele semanticus Richard Montague³⁴. Hier wordt de pragmatiek in feite behandeld als onderdeel van de formele semantiek.

Het grootste gedeelte van het huidige onderzoek binnen de logica en de grondslagen van de wiskunde vindt plaats binnen het paradigma van de structuralistische *ontologica* en slechts bij hoge uitzondering komt men werk tegen van een andere richting. Een dergelijke uitzondering vormt het werk van mijn landgenoot Per Martin-Löf³⁵. Hij grijpt terug naar de objectivistische epistemologica en gebruikt, evenals Frege, een geïnterpreteerde formele taal. Toch zijn er een aantal belangrijke verschillen. Martin-Löf gebruikt niet alleen de oordeelsvorm: A is waar, maar ook oordelen van de vorm:

A is een propositie.

Voor hem zijn de logische noties, en met name de proposities, niet *an sich*. Integendeel, zij zijn van onze activiteit afhankelijk. Een propositie, een *Satz*, veronderstelt een *Setzung*. Verder draait hij Bolzano's

prioriteits-ordening om. Waarheid van een propositie is niet de primaire notie, maar geldigheid van de ken-akte, ofte wel *bewijs*, waarmee wij kennis krijgen van de waarheid van een propositie.

Aan deze twee componenten, te weten de *Setzungs*-afhankelijkheid en de centrale stelling van de ken-akte en haar geldigheid, koppelt hij een derde. Evenals andere taalfilosofen en grondslagen-onderzoekers, waaronder Michael Dummett en Dag Prawitz, maakt Martin-Löf gebruik van gedachten die thuishoren binnen het wiskundig constructivisme. De oordeelsvorm:

A is waar
wordt door Martin-Löf gezien als een ellips voor de meer complexe oordeelsvorm:

c is een bewijs-object van de propositie A, die bekend is van Heytings betekenisverklaringen van intuïtionistische proposities³⁶. In plaats van "bewijs-object" kunnen wij misschien "waarmaker" gebruiken.

Een oordeel van de vorm:

A is een propositie
mag gevelde worden als men weet *wat* een waarmaker van A is (welke voorwaarden een waarmaker van A moet vervullen). Een oordeel van de vorm:

A is waar
(waarbij het een presuppositie is dat het oordeel: A is een propositie reeds gevelde is) mag men vellen als men weet *hoe* men een waarmaker c van A vindt, d.w.z. als men het recht heeft om het oordeel: c is een waarmaker van A te vellen. Kennis van betekenis is kennis-*wat* en kennis van waarheid is kennis-*hoe*³⁷.

Ondanks het feit dat waarheid van proposities gekoppeld is aan het geven van waarmakers betekent dit niet dat men terecht komt in een subjectivistisch moeras. Martin-Löf vermijdt dit d.m.v. een realisme in de vorm van een absolute notie van geldigheid of correctheid op het niveau van onze handelingen. Er is dus geen sprake van een subjectivistisch relativisme. Hij is niet, zoals Bolzano en Frege, bereid om te zeggen: de propositie A is waar óf de propositie niet-A is waar. Dit is niet het niveau waarop de "realiteit" werkt binnen zijn epistemologica. (De zaak ligt anders als wij het hebben over *het bestaan van toedrachten* in plaats van over *de waarheid van proposities*.) Het zijn onze ken-akten die objectief geldig of ongeldig zijn. Wanneer de realiteit ons, nadat het oordeel: A is waar gevelde is, terugfluit en ons overtuigt dat wij ons hebben vergist, dan is Martin-Löfs conclusie niet dat de propositie

niet-A waar is noch dat A onwaar is, maar dat de ken-akte ongeldig was. Zij was geen *echt* of *waar* bewijs van het gevelde oordeel en dit oordeel moet ingetrokken worden. Sinds Plato's *Theaetetus* (en Descartes' vierde meditatie) is het een *sine qua non* voor een kennis-theorie dat zij de mogelijkheid van vergissingen toestaat. Martin-Löfs theorie houdt inderdaad deze mogelijkheid open. Ondanks zijn kentheoretisch idealisme staat het metafysisch realisme op het niveau van de geldigheid garant voor de gewenste objectiviteit.

De kentheoretische positie van Martin-Löf kan vergeleken worden met een (objectivistisch) intuïtionisme binnen de ethiek. Hier corresponderen handelingen met ken-akten en het goed-zijn van een handeling met het geldig-zijn van een ken-akte. Verder correspondeert het resultaat (de gevolgen) van een handeling met het gevelde oordeel en gaat de parallel ook op wat wenselijk-zijn respectievelijk correct-zijn betreft. De prioriteits-ordeningen komen in beide gevallen overeen. Het is bijvoorbeeld niet zo dat een handeling goed is omdat het resultaat wenselijk is, maar andersom: het resultaat is wenselijk omdat de handeling goed is.

Bij een bekendmaking van een gevelde oordeel d.m.v. een assertie is een illocutionaire kennis- en waarheidsclaim aanwezig. Dit kunnen wij zien uit de observatie dat de tegen-vraag: hoe *weet* je dat dit *waar* is? altijd legitiem is als reactie op een assertie. Martin-Löfs theorie is de enige mij bekende die hieraan recht doet.

Ondanks het feit dat betekenis wordt verklaard in termen van waarmakers, "verificatoren", is dit geen botte verificatie-theorie van betekenis. Het verschil tussen Martin-Löfs verificationisme en dat van de logische neo-positivisten is dat Martin-Löf een *verificatie-theorie van waarheid* heeft. Men maakt een propositie waar door een waarmaker te construeren.

Het moge duidelijk zijn uit bovenstaande voorbeelden dat de centrale begrippen en opvattingen binnen Martin-Löfs raamwerk een rijk spectrum van filosofische vraagstellingen bestrijkt. Het is dan ook mijn plan om een aanzienlijk deel van mijn onderzoek hieraan te wijden.

In zekere zin grijpt Martin-Löfs oordeelsvorm :

c is een waarmaker van A

terug op de aristotelische S is P vorm. De Zweedse passage van Von Wright die ik citeerde in verband met de opkomst van de logica in de twintigste eeuw gaat verder met de opmerking dat het nog te vroeg is om deze ontwikkeling op haar juiste waarde te schatten. Is er sprake van een afschrijving van de laatste restjes van aristotelisch erfgoed of is het een

terugkeer naar bepaalde antieke en middeleeuwse denkbbeelden? Vandaag, 30 jaar na Von Wrights vraag, kunnen wij het saldo opmaken: de formeel-semantische ontologica staat voor een afschrijving terwijl men binnen de epistemologica van een terugkeer mag spreken.

Rest mij nu de aangename plicht om een aantal dankbetuigingen uit te spreken .

Heren Bestuurders van de Universiteit. Zoals U wellicht bekend is heb ik mijn academische opleiding niet in Nederland genoten, maar aan de universiteiten van Lund, Uppsala en Oxford. Des te groter is mijn erkentelijkheid dat U mij heeft willen benoemen. Mijn Zweedse en Engelse universiteiten zijn ook de oudsten van hun land. Het valt mij dan zeer gemakkelijk om mij hier in Leiden thuis te voelen. Vanzelfsprekend kunt U erop rekenen dat ik mijn best zal doen om het in mij gestelde vertrouwen waar te maken.

Dames en Heren van het wetenschappelijk en ondersteunend personeel, alsmede Dames en Heren Studenten, van de Faculteit der Wijsbegeerte. Gaarne wil ik U, en met name collega Philipse, danken voor de manier waarop ik ontvangen werd onder U. Zij was correct, warm, behulpzaam en belangstellend. Mijn eerste Leidse jaar is hierdoor zeer plezierig geworden en ik verheug mij op onze verdere samenwerking.

Hooggeleerde Nuchelmans. Sinds Frege's *Begriffsschrift* en de analyse van wat men de "ancestral" noemt, weten logici alles van de formele eigenschappen van de relatie opvolger-voorganger. Ik beschouw het als een eer om samen met U inhoud aan deze relatie te mogen geven. Het doet mij groot genoegen dat mijn onderzoeks-belangstelling, zowel wat de thematiek als de chronologische inrichting betreft, goede aansluiting vindt bij Uw geschiedenis van de propositie-opvattingen en ik hoop dat ik nog veel van U zal mogen leren.

Heren Docenten van de Faculteit der Wijsbegeerte aan de Katholieke Universiteit te Nijmegen. Met dankbaarheid denk ik terug aan de zes jaren dat ik samen met U werkte. Voor een analytisch geschoolde filosoof was het een openbaring en een "culture shock" om te vertoeven in een, filosofisch gezien, zo pluriforme omgeving. Met name de logisch-historische belangstelling van de Heren Boukema en Vennix had een aanstekelijke uitwerking. In dit verband wil ik ook de hoogleraren Van Dalen (Utrecht) en De Iongh (Nijmegen) danken, die instrumenteel waren voor mijn komst naar Nederland in 1980 resp. 1981.

Hier wil ik ook de gelegenheid nemen om mijn dank te richten aan

mijn *Oxfordleraren* Dana Scott, Robin Gandy en Michael Dummett, waar de laatste tevens examinerator van mijn proefschrift was in 1983.

Tenslotte gaat mijn dank naar mijn *Zweedse leraren en oud-collegae*: wijlen Stig Kanger, Sören Stenlund en Dag Prawitz, die mij inwijdde in de Zweedse bewijs-theoretische school. De grootste dank ben ik aan Per Martin-Löf schuldig, die, hoewel hij nooit formeel mijn begeleider was, zeer vrijgevig was met zijn tijd en zijn inzichten. Het is dan ook van hem dat ik het meeste heb geleerd.

Ik heb gezegd.

NOTEN

1. "Logical atomism", in: *Logic and Knowledge*, George Allen and Unwin, London 1956, blz. 323.
2. *The interpretation of Frege's Philosophy*, Harvard U.P., Cambridge, Ma. 1981, blz. 39.
3. *Logic and Reality*, University of Wisconsin Press, Madison 1964, blz. 177.
4. *Logik, filosofi och språk*, (2^e ed.), Aldus/Bonniers, Stockholm 1965, blz. 29-30.
5. *Methods of Logic*, Holt and Co., N.Y. 1950, blz. vii.
6. *Begriffsschrift, eine der arithmetische nachgebildete Formelsprache des reinen Denken*, Louis Nebert, Halle 1879.
7. *Wissenschaftslehre*, J. v. Seidel, Sulzbach 1837.
8. *Filosofins historia. Från Bolzano till Wittgenstein*. Bonniers, Stockholm 1966, blz. 64.
9. *Theories of the Proposition*, North-Holland, Amsterdam 1973.
- Late-Scholastic and Humanist Theories of the Proposition*, North-Holland, Amsterdam 1980.
- Judgement and Proposition*, North-Holland, Amsterdam 1983.
10. De *Wissenschaftslehre*, §§ 19, 24-26, 34, 48, 125-127 zijn belangrijke bronnen voor het voorafgaande betoog. Goede presentaties van Bolzano geven J. Berg, *Bolzano's Logic*, Almquist & Wiksell, Stockholm 1962, en E. Morscher, *Das logische An-sich bei Bernhard Bolzano*, Pustet, Salzburg 1973.
11. *Über Annahmen*, J.A. Barth, Leipzig 1902, hfdst. 7.
12. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF 100, 1892, blz. 25-50.
13. *The Principles of Mathematics*, Cambridge U.P., Cambridge 1903, §§ 475-486.
14. A.N. Whitehead en B. Russell, *Principia Mathematica*, Cambridge U.P., Cambridge 1910.
15. *Theory of Knowledge*, E. Ramsden Eames (ed.), George Allen and Unwin, London 1984.
16. *The Mathematical Analysis of Logic*, herdruk: Basil Blackwell, Oxford 1948, blz. 3.
17. *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 vol., 1890-1895, herdruk: Chelsea, N.Y. 1966.
18. Gottlob Frege, "Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schöders Vorlesungen über die Algebra der Logik", *Archiv für systematische Philosophie* 1 (1895), blz. 433-456.
19. Constance Reid, *Hilbert*, Springer, N.Y. 1970, blz. 57.
20. In een reeks artikelen die de titel *Über die Grundlagen der Geometrie* dragen. Zie Frege's *Kleine Schriften*, I. Angelelli (hrsg.), Olms, Hildesheim 1967.
21. Een "formeel teken" is niet een gewoon teken met *suppositio materialis*. Het is in zekere zin überhaupt geen teken. Het drukt niets uit en heeft geen betekenis.
22. "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen* 95 (1926), blz. 177.

23. "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung.", in: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. III, Springer, Berlin 1935, blz. 163.
24. op.cit., noot 22, blz. 176-177.
25. op.cit., noot 6, § 2.
26. op.cit., noot 14, blz. 92.
27. "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis* 2 (1931), blz. 113.
28. "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38 (1931), blz. 173-198.
29. Onder meer als gevolg van Quine's "Truth by Convention", in: O.H. Lee (ed.), *Philosophical Essays for A.N. Whitehead*, Longmans, N.Y. 1936, blz. 90-124.
30. Nicolas Bourbaki, "L'Architecture des Mathématiques", in: F. le Lionnais (ed.), *Les Grands Courants de la Pensée Mathématique*, 2^e éd., Albert Blanchard, Paris 1962, blz. 35-47.
31. "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Studia Philosophica* 1 (1936), blz. 261-405.
32. J. Etchemendy, "Tarski on truth and logical consequence", *Journal of Symbolic Logic* 53 (1988), blz. 51-79.
- W. Hodges, "Truth in a structure", *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1985-86, blz. 134-151.
33. *Foundations of the Theory of Signs*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1938.
34. Herdruk in: *Formal Philosophy*, (R. Thomason, ed.), Yale U.P., New Haven 1974, blz. 95-118.
35. *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Napoli 1984.
- "On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws", in: *Atti degli incontri di logica matematica*, vol. 2, Scuola di Specializzazione in Logica Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Siena, 1985, blz. 203-281.
- "Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof", *Synthese* 73 (1987), blz. 407-420.
36. Ik heb deze betekenisverklaringen vrij uitgebreid besproken in "Constructions, Proofs and the Meaning of the Logical Constants", *Journal of Philosophical Logic*, 12 (1983), blz. 151-172.
37. Door de aanwezigheid van de modaliteit *weten* in deze verklaringen wordt Montague's visie omgedraaid: de semantiek is hier in zekere zin een onderdeel van de pragmatiek.