De logica het werk laten doen

Verduyn Lunel, S.M.

De logica het werk laten doen

Rede uitgesproken door

Sjoerd Verduyn Lunel

bij de aanvaarding van het ambt
van hoogleraar Theoretische Analyse
aan de Universiteit Leiden
gehouden op 28 september 2001.

Mijnheer de Rector Magnificus,
Zeer gewaardeerde toehoorders,

De terroristische aanslagen in de Verenigde Staten van 11 september jongstleden zijn onvoorstelbaar en mijn medeleven gaat uit naar de vele slachtoffers en hun familie.

Anders dan bijvoorbeeld een historicus, kan ik u als wiskundige helaas geen kader geven om de gebeurtenissen te doorgronden en de mogelijke consequenties te overzien. De wiskundige bestudeert een axiomatische wereld waarin de wetten van de logica overheersen, maar zelfs in deze axiomatische wereld is niet alles te doorgronden. In 1930 heeft de logicus Gödel (1906-1978) namelijk laten zien dat, onafhankelijk van de verzameling consistente axioma's, er altijd uitspraken zijn die onbeslisbaar zijn, dat wil zeggen, waarvan men niet kan bewijzen of ze juist dan wel onjuist zijn.[1]

Mijn leeropdracht is de theoretische analyse ofwel dat deel van de wiskunde waarin de begrippen functie, limiet en convergentie, een belangrijke rol spelen.[2] Men kan zeggen dat de theoretische analyse haar definitieve en moderne vorm kreeg, met de publicatie in 1748 van *Introductio in analysin infinitorum* van de grote wiskundige Euler (1707-1783). Dit werk is het eerste deel van een trilogie die een indrukwekkend overzicht geeft van de belangrijke wiskundige ontdekkingen in de analyse tot dan toe. Euler bouwde voort op het zeventiende eeuwse werk van Newton en Leibniz, en gaf de aanzet tot een indrukwekkend wiskundig raamwerk, dat is uitgegroeid tot de grondslag voor de revolutionaire ontwikkelingen in wetenschap en technologie.
Van bijzonder belang is Euler's uitwerking van het begrip *functie* en de rol van het begrip *oneindig* in de analyse van functies.

Het begrip functie, in de zeventiende eeuw nog een expliciet rekenvoorschrift, bijvoorbeeld, de functie $f(x)=1+x+x^2$, waarmee men voor iedere gegeven waarde van x, via het voorschrift, de waarde van $f(x)$ kan bepalen, wordt in het werk van Euler een algemener rekenvoorschrift, dat niet altijd meer expliciet te berekenen is. Eerst liet Euler analytische rekenvoorschriften met oneindig veel termen in de variabele x toe, bijvoorbeeld de functie

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{72} + \frac{x^8}{40320} - \ldots$$

en zo oneindig lang verder. Gedreven door toepassingen, verband houdende met het modelleren van een trillende snaar, gaf Euler zeven jaar na zijn eerste definitie de aanzet tot ons modern functiebegrip.[3] De structuureigenschappen van functies komen steeds centraler te staan. De consequentie van deze ontwikkeling werd getrokken in de theorie der verzamelingen, ontwikkeld sinds ongeveer 1875.[4] Een functie wordt nu een voorschrift, dat aan elementen van een verzameling, elementen van een andere verzameling toevoegt.

Het abstracte functiebegrip is zo succesvol dat we het welhaast als vanzelfsprekend beschouwen. Denk aan interfaces, routines en procedures in programmeertalen en de modulariteit van grote softwareprojecten. Een groot deel van het succes van het *world wide web* wordt toegeschreven aan de gelaagde modulaire structuur bestaande uit maar liefst zeven lagen. Dit maakt het bijvoorbeeld mogelijk de hardware structuur van het netwerk te wijzigen, zonder dat dit invloed heeft op de manier waarop de gebruiker de webpagina's definieert. Functies of transformaties, of algemener relaties, spelen ook een belangrijke rol in neurale netten en relationele databases, voor de toegankelijke opslag van informatie.

Laten we nog even verder gaan met het beschrijven van het belang van wiskundige concepten en het belang van wiskundig redeneren in het dagelijks leven. Het is, in het algemeen, niet voldoende om feiten te *kennen*, men moet feiten *begrijpen* en *zeker* weten dat ze waar zijn. Daarom hechten wiskundigen zo aan het begrip *bewijs*. Een voorbeeld. Stel dat men een verzameling objecten heeft, bijvoorbeeld een verzameling mensen, dan zijn er veel manieren waarop men de objecten uit de verzameling kan beschrijven. Zo zijn de kroonprins van Nederland en Willem-Alexander, twee beschrijvingen van hetzelfde object. Terwijl de eerste beschrijving het object uniek beschrijft, doet de tweede dat niet. Geen van beide is een, wat wiskundigen noemen, canonieke vorm. Een canonieke vorm is een heldere manier om *ieder* object uit een verzameling van objecten uniek te beschrijven. Dus om na te gaan of twee objecten identiek zijn, is het voldoende om na te gaan of de bijbehorende canonieke vormen gelijk zijn. Een goed bruikbare canonieke vorm in dit voorbeeld is de vingerafdruk. Als men wil aantonen dat Willem-Alexander de kroonprins van Nederland is, dan is het voldoende om de vingerafdruk van Willem-Alexander te vergelijken met die van de kroonprins. Canonieke vormen maken het mogelijk om over de classificatie van objecten na te denken. De huidige classificatie van het menselijk gen *gebruikt* niet alleen wiskundige technieken, maar bouwt ook voort op wiskundige concepten en wiskundig redeneren.

In het verlengde van deze vertrouwde concepten uit het dagelijks leven ligt het decimale stelsel waarin we de getallen representeren. Als we het stichtingsjaar 1575 van de Leidse universiteit nemen, dan bedoelen we hiermee de volgende som van machten van tien

$$1575 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0.$$

We gebruiken het decimale stelsel om een canonieke representatie voor de getallen te geven. Evengoed hadden we het binaire of tweetallige stelsel als canonieke vorm kunnen gebruiken zoals we, bijvoorbeeld, in onze digitale computers doen. Niet alleen de gehele getallen, maar ook de breuken kan men in het decimale stelsel representeren. Dit gaat als volgt, men verdeelt de afstand tussen twee gehele getallen in tien gelijke delen, vervolgens verdeelt men ieder deel opnieuw in tien gelijke delen, enzovoort. Dit is een van de eerste systemen met zelfgelijkvormigheid, waar ik zo dadelijk uitgebreid op zal terugkomen.

Stevin (1548-1620), leraar en adviseur van Prins Maurits van Oranje (oprichter van de Leidse universiteit), was een grote voorvechter voor het gebruik van het decimale stelsel. In zijn boek De *thiende* gepubliceerd in Leyden in 1585, laat Stevin zien hoe men het decimale stelsel kan gebruiken om eenvoudig met breuken te rekenen. Als geen ander was Stevin zich bewust van het belang van wiskundig redeneren in het dagelijks leven.[5] Hij publiceert in het Nederlands, en niet in het dan gebruikelijke Latijn, en opent zijn boek met de volgende opdracht 'De sterrekijkers, landmeters, tapijtmeters, wijnmeters en lichaamsmeters in het algemeen, muntmeesters en alle kooplieden wenst Simon Stevin geluk.' Even later schrijft Stevin in het voorwoord van De *thiende* de volgende aanbeveling voor zijn werk 'Zij leert (om in een woord te zeggen) alle berekeningen die onder de mensen nodig zijn, zonder gebruik te maken van breuken. In de zin dat men de operaties kan terugbrengen tot optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen met gehele getallen.' Stevin was zich zeer bewust van het maatschappelijk belang van de wiskunde.

De wiskundige concepten *decimaal stelsel, canonieke vorm* en *functie* illustreren het belang van wiskundig redeneren en het gebruik van wiskundige concepten in het dagelijks leven. Dit eeuwenlange wiskundig voorwerk *mag* niet onderschat worden. Het is opmerkelijk dat de wiskundige begrippen zo naadloos aansluiten bij de moderne behoeften en dat, bijvoorbeeld, wiskundigen niet met een nieuwe release van het functiebegrip, functie1.5, hoeven te komen om in te spelen op de nieuwe ontwikkelingen.

Naast het functiebegrip kreeg ook het begrip *oneindig* definitief vorm in het werk van Euler. De kern van mijn vakgebied is het beter begrijpen van en het werken met oneindig. Zoals mijn zoon zegt 'ik kan tot oneindig tellen 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 en de rest gaat vanzelf'. Oneindig is zonder einde, de axioma's van Peano beschrijven formeel het bestaan van oneindig veel natuurlijke getallen, en het begrip oneindig is essentieel in de constructie van de reële getallen. De door Euler bewezen som

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

bevat een schat aan informatie. Aan de linkerkant van de vergelijking sommeert men de reciproken van de kwadraten en is men nooit klaar, terwijl de rechterkant van de vergelijking een gesloten vorm heeft. De wiskunde beschikt over geweldige methoden om het onmenselijke gat tussen eindig en oneindig te slechten. Dit is niet altijd eenvoudig en soms zelfs tegen intuïtief. Zo liet Cantor zien dat men aan elke breuk een uniek geheel getal kan toewijzen (een aftelling van de breuken door de gehele getallen). En in de infinitesimaalrekening, interpreteert men uitdrukkingen met oneindig veel oneindig kleine elementen, om de oppervlakte van ingewikkelde oppervlakken te bepalen. Om de verandering van een grootheid in een gegeven punt (de snelheid) te bepalen, meten we de verandering van de grootheid, ten opzichte van de verandering in de variabele. Dat wil zeggen, dat we voor een gegeven functie f, het quotiënt van $f(x+h)-f(x)$ en h beschouwen. Als we vervolgens h naar nul laten naderen, dan nadert dit quotiënt naar de snelheid van verandering in x, notatie,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De functie f' heet de afgeleide van f en speelt, via de infinitesimaalrekening, een fundamentele rol bij de formulering van wiskundige modellen, bijvoorbeeld, in de stromingsleer bij het transport van massa, in de financiële wiskunde bij het transport van welvaart, en in de telecommunicatie bij het nauwkeurig berekenen van satellietbanen.

Een illustratie. Uit de meetgegevens van Tycho Brahe (1546-1601) trok Kepler (1571-1630) de conclusie dat de planeten elliptische banen beschrijven met de zon in een van brandpunten (een ellips is de verzameling punten zodat de som van de afstanden tot twee gegeven vaste punten, de zogenaamde brandpunten, constant is). Deze observatie gebruikte Newton (1642-1727) om met behulp van een wiskundig model te laten zien dat de gravitatiekracht tussen twee lichamen evenredig is met de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de onderlinge afstand. Met de door Newton ontwikkelde Hamiltoniaanse mechanica voor de beschrijving van de banen die hemellichamen doorlopen, kan men voor systemen die bestaan uit twee lichamen (zon en aarde) de elliptische banen en de bijbehorende brandpunten precies uitrekenen. De overeenkomsten tussen de uitkomsten van het model en de meetgegevens zijn verbijsterend. Voor de uiterst relevante systemen die bestaan uit drie lichamen (zon, aarde en satelliet) zijn de banen zeer complex en heeft men de theorie van de dynamische systemen en de digitale computer nodig om het gedrag van de banen te kunnen beschrijven. Mogelijke satellietbanen rond het niet-triviale brandpunt van het systeem dat bestaat uit de zon en de aarde, spelen een bijzondere rol in het Genesis project van de NASA.[6]

Tot nu toe heb ik vooral *statisch* over abstracte concepten en structuren gesproken. Een interessante ontwikkeling is om de objecten niet statisch maar *dynamisch* te beschouwen. In plaats van naar foto's kijkt men naar een film. In plaats van naar een plant kijkt men naar het hele (stapsgewijze) proces van generatie. In plaats van naar een bergketen kijkt men naar het hele proces van verschuivingen en verplaatsingen van de aardkorst over de eeuwen. Heel verschillende tijdschalen zijn in het spel, soms zelfs in één enkel systeem en de moderne analyse heeft technieken om de dynamica van zulke systemen doeltreffend te analyseren. Ook in mijn eigen onderzoek speelt de fascinatie met de begrippen, klein, groot en oneindig, in interactie met dynamica, een grote rol.

Geachte dames en heren,

Bij een eerdere gelegenheid zoals deze heb ik een variant op de slogan van de belastingdienst gebruikt *'Gemakkelijker kunnen we het niet maken, maar wel leuker'* . Opnieuw zal proberen u deelgenoot te maken van mijn inspiratiebronnen. Ditmaal via het principe van regelsystemen met terugkoppeling. Stelt u zich eens een systeem voor dat bij een gegeven invoer een uitvoer produceert, die we via een regelmechanisme kunnen terugkoppelen in de invoer. Om de gedachte te kunnen bepalen kunt u denken aan een videocamera die gericht staat op de televisie waarop de opnamen, gefilmd door de camera, worden afgespeeld. Het regelmechanisme bestaat uit de positie van de camera ten opzichte van het scherm. Een ander regelsysteem met terugkoppeling is een douche waarbij men, op grond van de temperatuur van het douchewater, via kranen de invoer van warm en koud water regelt. Nog een ander regelsysteem met terugkoppeling is de *cruise-control* in een luxe auto. Elk regelsysteem dat een financiële markt beschrijft heeft zeer sterke terugkoppelingen, immers kopen leidt tot meer kopen en verkopen leidt tot meer verkopen. Ook de processen die betrekking hebben op intercellulaire communicatie en interactie zijn voorbeelden van regelsystemen met terugkoppeling.

Het lange tijd gedrag van een regelsysteem is het gedrag dat men in de praktijk ziet, en het begrip attractor of aantrekker speelt een belangrijke rol bij de beschrijving van de lange tijd dynamica. De attractor van een regelsysteem is, grof gezegd, de oneindige verzameling punten in de toestandsruimte die het lange tijd gedrag van het regelsysteem representeren. Afhankelijk van het regelsysteem kan de attractor een evenwicht zijn (de steady state), een periodieke oplossing, een quasi-periodieke oplossing (een som van periodieke oplossingen) of nog algemener wat men noemt een *vreemde attractor* (strange attractor).

Het eenvoudigste regelsysteem met terugkoppeling is een discreet iteratief systeem. Als de toestand x_0 is gegeven, en er een algemene relatie is tussen de toestand op tijd n en de toestand op tijd $n+1$, zeg gegeven door

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

dan volgt de toestand door x_1 de functie f in x_0 te evalueren, vervolgens gebruiken we de toestand x_1 om met hulp van de vergelijking x_2 uit te rekenen, enzovoort. Echter gesloten formules om, bijvoorbeeld, x_{1000} uit te rekenen zijn zelden beschikbaar. Het komt er meestal op neer, eerst alle de aan x_{1000} voorafgaande toestanden te berekenen. Geen aangenaam werk om met de hand te doen, maar met de digitale computer kunnen ineens discrete modellen voor zeer lange tijd doorgerekend worden. Deze resultaten, die voorheen onbereikbaar waren, geven verdere aanzetten tot de ontwikkeling van een nieuwe wiskundige analyse van het lange tijd gedrag. Niet alleen als functie van tijd en plaats, maar abstracter als functie van parameters en startwaarden.

Eenvoudige regelsystemen kunnen een complexe uitvoer hebben, niet alleen door ruis in de invoer (dit leidt tot zogenaamde stochastische regelsystemen). Het kan ook zijn dat het deterministische systeem een chaotische uitvoer heeft. Er geldt, bijvoorbeeld, voor het systeem

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) \text{ met } 0<x_0<1,$$

dat de correlatie tussen opeenvolgende iteraties snel daalt, met als gevolg dat de uitvoer sterk lijkt op een willekeurige uitvoer. Om de complexe structuur van de attractoren van zulke systemen te doorgronden, worden technieken uit de theorie van de dynamische systemen, uit de maat en integratietheorie en uit de kansrekening gebruikt.

Een prototype dat men eenvoudig op een rekenmachine kan programmeren is de Newton iteratie, bijvoorbeeld, beschreven door de regel

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \text{ , waarbij } n = 0,1,2,3,..$$

Voor iedere gegeven startwaarde $x_0 > 0$ nadert de rij x_n, de zogenaamde baan van x_0, naar wortel twee, de attractor van het systeem. Ook heeft men informatie over de snelheid waarmee de rij x_n naar wortel twee nadert, iedere stap verdubbelt het aantal correcte decimalen. In plaats van wortel twee op duizend decimalen nauwkeurig op te slaan, bewaart men de startwaarde $x_0 = 1$ en het bovenstaande iteratieschema. Na elf iteraties benadert x_{11} het reële getal wortel twee al op meer dan duizend decimalen nauwkeurig! Door dynamica met het statische object, het reële getal wortel twee, te associëren, ontstaat een enorme geheugenreductie (men kan werkelijk data weggooien). Veel van de moderne methoden om data te comprimeren zijn gebaseerd op dit principe.[7]

Typisch in mijn onderzoek zijn tijdsvertragingen in de terugkoppeling van het regelsysteem. Denk maar aan de douche, waar de tijdsvertraging ontstaat door de tijd die het water nodig heeft om van de kranen naar de douchekop te gaan. Of algemener, aan systemen met satellietcommunicatie of lasers met terugkoppeling[8], waar de tijdsvertraging in de terugkoppeling ontstaat door de eindigheid van de geluid en lichtsnelheid. Zulke tijdsvertragingen in de terugkoppeling kunnen grote gevolgen hebben voor de structuur van de attractor van het regelsysteem. Naast de lange tijd dynamica van het regelsysteem, zijn we ook geïnteresseerd hoe gevoelig het regelsysteem is voor kleine veranderingen in de invoer of kleine veranderingen in de tijdsvertraging in de terugkoppeling. Dit is van groot belang voor de toepassingen want er zijn altijd onnauwkeurigheden in de metingen.

Ter illustratie wil ik met u een voorbeeld bespreken waarin verzamelingen geïntroduceerd door de wiskundige Cantor (1845-1918) centraal staan. Cantorverzamelingen spelen een fundamentele rol in veel gebieden van de wiskunde en, in het bijzonder, in de theorie van de chaotische dynamische systemen. Ze laten op een fascinerende manier zien hoe de door mij geïntroduceerde begrippen en concepten samenkomen.

De Cantorverzameling

Begin met het interval of lijnstuk met alle reëele getallen groter gelijk nul en kleiner gelijk een, en verwijder alle reëele getallen groter dan eenderde en kleiner dan tweederde. Met andere woorden, verdeel het interval [0,1] in drie gelijke delen en verwijder het middelste deel. Herhaal het proces door het interval met alle reëele getallen groter gelijk nul en kleiner gelijk eenderde en het interval met alle reëele getallen groter gelijk tweederde en kleiner gelijk een te beschouwen. Verwijder het interval met alle reëele getallen groter dan eennegende en kleiner dan tweenegende en verwijder het interval met alle reëele getallen groter dan zevennegende en kleiner dan achtnegende. Dus bij elke iteratieslag verdelen we ieder overgebleven interval in drie gelijke delen en verwijderen steeds het middelste deel van ieder interval. De Cantorverzameling bestaat nu uit die reëele getallen die overblijven als we dit proces *oneindig* vaak herhalen.

Het is eenvoudig in te zien dat er reëele getallen zijn die dit eliminatieproces overleven, bijvoorbeeld de eindpunten van de deelintervallen

$$0,1,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9},\frac{8}{9},\dots$$

maar er zijn meer, veel meer, reëele getallen in de Cantorverzameling. Het is bekend dat de Cantorverzameling niet aftelbaar is, dat wil zeggen, er bestaat geen aftelling van de reëele getallen in de Cantorverzameling door de gehele getallen. Een elegante karakterisering van de Cantorverzameling kan met behulp van het drietallig stelsel gegeven worden. In plaats van elk getal te schrijven als som van machten van tien schrijven we elk getal als som van machten van drie. Dus, bijvoorbeeld,

$$\frac{8}{9} = 0\times3^{0}+2\times3^{-1}+2\times3^{-2}+ 0\times3^{-3}+ 0\times3^{-4}+ \dots = 0{,}2200\dots$$

Elk getal kan geschreven worden als een som van machten van drie en de representatie is bijna uniek, alleen voor pure machten van drie is er een keuze. We spreken af om te schrijven

$$\frac{1}{3} = 0\times3^{0}+0\times3^{-1}+0\times3^{-2}+2\times3^{-3}+ \dots = 0{,}022\dots$$

en niet

$$\frac{1}{3} = 0{,}100\dots$$

Met deze begrippen kunnen we de Cantorverzameling als volgt karakteriseren: De Cantorverzameling bestaat uit die reëele getallen groter gelijk nul en kleiner gelijk een, waarvoor geldt dat de ontwikkeling in het drietallig stelsel geen enkele een bevat.

In het bijzonder, volgt uit deze karakterisering dat men met elk reëel getal groter gelijk nul en kleiner gelijk een, een uniek element uit de Cantorverzameling kan associëren. Dit gaat als volgt, neem een reëel getal groter gelijk nul en kleiner gelijk een, ontwikkel dit getal in het binaire stelsel, vervang iedere een door een twee. Beschouw het resultaat als een ontwikkeling in het drietallig stelsel met alleen nullen en twee'en. Dit levert een element van de Cantorverzameling op.

De Cantorverzameling is dus groot. Anderzijds, als men een maat invoert met de eigenschap dat de maat van een interval $[a,b]$ precies de lengte $b - a$ van het interval is, dan kan men bewijzen dat de maat van de Cantorverzameling gelijk aan nul is. De Cantorverzameling is dus een verzameling die *klein* en *groot* tegelijk is, een vreemde verzameling die leeft in het oneindige.

Hoe complex is de Cantorverzameling?

De fractale dimensie van een object is een van de maten waarmee men de complexiteit van een verzameling kan meten. De dimensie is grofweg de hoeveelheid informatie die men nodig heeft om de verzameling nauwkeurig te beschrijven. Er zijn verschillende uitbreidingen van het begrip dimensie naar algemenere verzamelingen, die meestal overeen komen. Als ik in het vervolg over de fractale dimensie spreek dan bedoel ik de Hausdorff dimensie[9]. In overeenstemming met onze intuïtie is de fractale dimensie van een punt gelijk aan nul, van een lijnstuk gelijk aan een, en van een stukje papier (zonder dikte) gelijk aan twee. Maar ook van, bijvoorbeeld, een pad van een stochastische wandeling (of random walk) in het vlak–dit is een pad van een deeltje dat elke tijdstap met gelijke kans een stap naar rechts, naar links, naar boven of naar beneden doet–kan men de fractale dimensie bepalen. Het blijkt dat de fractale dimensie van een pad van de stochastische wandeling door het vlak, met kans een, gelijk aan twee is. Dit geeft aan dat we, met kans een, evenveel informatie nodig hebben om een pad van een stochastische wandeling te beschrijven als we nodig hebben om het gehele vlak te beschrijven. En zo krijgen we een beter inzicht in de complexiteit van de paden van een stochastische wandeling.

Wat zou de fractale dimensie van de Cantorverzameling zijn? Door alle gaten lijkt het niet meer op het lijnstuk waarmee we het proces begonnen, aan de andere kant bestaat de Cantorverzameling uit erg veel punten. De dynamica helpt ons om deze vragen te beantwoorden! In plaats van de Cantorverzameling beschouwen we het dynamische proces van haar ontstaan. Dit gaat als volgt. Definieer de transformaties w_1 en w_2 door

$$w_1(x) = \frac{x}{3} \text{ en } w_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$$

Voor een deelverzameling $A \subseteq [0,1]$ definiëren we de zogenaamde Hutchinson operator W door

$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$$

De volgende feiten zijn een gevolg van de dekpuntstelling van Banach (1892-1945)[10]. De Cantorverzameling is precies die unieke verzameling $C \subset [0,1]$ met de eigenschap dat

$$C = w_1(C) \cup w_2(C)$$

Bovendien convergeert het regelsysteem gedefinieerd door

$$A_{n+1} = w_1(A_n) \cup w_2(A_n) \qquad n = 0,1,2,...$$

voor elke beginverzameling $A \subseteq [0,1]$ naar de Cantorverzameling. In woorden, de Cantorverzameling is de vereniging van geschaalde gelijkvormige kopieën van zichzelf, en de attractor van een regelsysteem met terugkoppeling, zoals wortel twee dat was voor de Newton iteratie.

Ik realiseer me dat deze laatste details uw misschien zullen ontgaan, maar op deze manier associëren we een regelsysteem met een statisch object (met het statische object als de attractor van het regelsysteem). Met de recente ontwikkelingen op het raakvlak van de dimensietheorie en de dynamische systemen kunnen we op deze manier enorm veel eigenschappen van Cantorachtige verzamelingen te weten komen[11].

Recent onderzoek samen met collega Nussbaum laat zien dat de spectraaltheorie voor Perron-Frobenius of overgangsoperatoren, die men met het regelsysteem kan associëren, een krachtige methode geeft om de fractale dimensie van vele invariante verzamelingen expliciet uit te rekenen. Voor de invariante verzameling, gedefinieerd door

$$C = w_1(C) \cup w_2(C)$$

wordt de Perron-Frobenius of overgangsoperator L_s gegeven door

$$(L_s f)(t) = (w_1'(t))^s f(w_1(t)) + (w_2'(t))^s f(w_2(t))$$

De dimensie van de invariante verzameling C is nu *die* waarde van s waarvoor geldt dat de spectrale straal van de overgangsoperator L_s gelijk aan een is.

Voor de Cantorverzameling geldt dat $w_1'(t) = w_2'(t) = 1/3$ en basiseigenschappen van de spectrale straal geven dat de fractale dimensie van de Cantorverzameling gelijk is aan de oplossing van de vergelijking

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^s = 1 \text{ ofwel } s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Een bekend resultaat, echter de benadering via de spectraaltheorie van de overgangsoperator geldt voor veel algemenere invariante verzamelingen, is nauw verbonden met het fundamentele werk van Bowen, Moran en Ruelle[12] op dit gebied, en levert nieuwe inzichten op.

Naast de fractale dimensie speelt ook de invariante maat, die aangeeft hoe groot de kans is dat een deelverzameling van de attractor door een gegeven baan wordt bezocht, een belangrijke rol om de complexiteit van de attractor te doorgronden. We hebben al eerder opgemerkt dat de attractoren de objecten zijn, die men experimenteel ziet. Interessant is echter dat de fractale dimensie en de invariante maat ook uit de experimentele data benaderd kunnen worden, waarna men reconstructietechnieken, zoals die bijvoorbeeld door Takens ontwikkeld zijn, kan toepassen om projecties van de attractor in de toestandsruimte te reconstrueren[13].

Met de Cantorverzameling kan men dus een Perron-Frobenius of overgangsoperator associëren, gedefinieerd op een verzameling van functies, een zogenaamde functieruimte. In een functieruimte wordt een functie niet meer gezien als een collectie van waarden of getallenparen, maar als een enkel object, een punt of vector. Een verzameling functies wordt zo een verzameling vectoren en blijkt een ruimtelijke structuur te hebben: met rechte lijnen, vlakken en een afstandsbegrip. Het is echter een *oneindig* dimensionale ruimte. De algemene spectraaltheorie voor deze overgangsoperatoren is moeilijk en nog niet goed ontwikkeld. Men probeert eindige dimensionale concepten zoals determinant, spectrum en spoor uit te breiden naar deze operatoren gedefinieerd op oneindig dimensionale vectorruimten.

In de bovenstaande voorbeelden heb ik twee discrete tijd dynamische systemen met u besproken. Dit betekent niet dat continue tijd modellen onbelangrijk zouden zijn. Er zijn grote successen geboekt met de bestudering van continue tijd modellen, men kan hierbij denken aan de eerder genoemde Hamiltoniaanse mechanica, maar ook aan de vergelijkingen om vloeistofstromingen te beschrijven en reactie-diffusie vergelijkingen. Vanuit modelleerperspectief zijn continue tijd modellen vaak eenvoudiger af te leiden. Dit doordat de randvoorwaarden en begincondities gemakkelijker geformuleerd kunnen worden. Regelsystemen met discrete tijd, daarentegen, zijn recursief, eenvoudig uit te rekenen en winnen duidelijk aan belang. Zo ontstaan er hybride modellen met zowel continue als discrete elementen. Een belangrijke klasse is de *lattice differential equations*. Dit zijn gekoppelde stelsels gewone differentiaalvergelijkingen, vaak opgebouwd uit oneindig veel vergelijkingen, waarbij de toestandsvector beschreven wordt in de punten van een rooster[14]. Nauw hiermee verbonden zijn *coupled map lattices* ingevoerd aan het begin van de jaren tachtig door de fysicus Kaneko[15], als klasse fenomenologische modellen, om het gedrag van een groot aantal gekoppelde chaotische systemen te doorgronden. Dit zijn dynamische systemen met zowel discrete tijd als discrete ruimte[16]. Ook bij de analyse van deze systemen spelen Perron-Frobenius operatoren een belangrijke rol.

De maatschappelijke positie van de wiskunde

Tot nu toe heb ik u vooral in mijn keuken laten kijken omdat daar mijn hart ligt, maar zoals ik al eerder heb betoogd, ligt er ook een belangrijke taak voor de wiskundige in de eetkamer, waar we onze methoden en technieken kunnen presenteren. Van Israel Gohberg, en ook van Mike Keane, heb ik geleerd dat je vrijheid in het wetenschappelijk onderzoek moet verdienen, niet alleen door het geven van onderwijs maar ook door een deel van het onderzoek te sturen door vragen uit de toepassingen. Voor een analyticus is het relatief eenvoudig concrete bijdragen aan de toepassingen te leveren. Vooral op het gebied *fundamenten van levensprocessen* liggen goede mogelijkheden. Samen met Leen Stougie organiseer ik dit jaar een NWO-jaarthema Mathematische Biologie om nieuwe interessante problemen te inventariseren. Het belang van wiskundige modellen wordt reeds lang onderkend. Echter wat nieuw is, is de beschikbaarheid van enorme hoeveelheden data en de opkomst van nieuwe goedkope methoden om experimenten uit te voeren. Netwerken, regelsystemen met terugkoppeling (in het bijzonder cellular automata), optimatisatie, reconstructietechnieken en filtering zullen, ook in deze context, nog belangrijker worden. De komende jaren zal ik een belangrijk deel van mijn onderzoek uitvoeren op dit gebied ingebed in het Bioscience initiatief van onze faculteit.

Samen met collega Bliek (Chemische Technologie, Universiteit van Amsterdam) begeleid ik twee promovendi die het dynamisch gedrag en de structuur van de attractoren van periodieke processen proberen te doorgronden. In toepassingen in de chemische technologie worden periodieke processen steeds belangrijker, denk bijvoorbeeld aan cyclische reactor regeneratiestappen. De zogenaamde *pressure swing reactoren en reverse flow reactoren* zijn inmiddels op commerciële schaal geïntroduceerd. Het effectief berekenen van cyclische evenwichten in zulke periodieke processen is niet eenvoudig en een interessant gebied op het raakvlak van de numerieke wiskunde en de dynamische systemen.

Ik sta open voor uw vragen en problemen.

De opleiding wiskunde

Er is een ontwikkeling in de wiskunde gaande die zich, onder andere, uit in een hernieuwd contact met onderzoekers uit de aanpalende disciplines. Zij die invloed hebben op de studiekeuze van de middelbare scholieren zullen doordrongen moeten worden van het feit dat wiskunde *leeft* en een ideale uitvalsbasis is voor een pragmatische opleiding met vele beroepsmogelijkheden. In de beta-opleidingen zullen de studenten meer mogelijkheden moeten krijgen om in aanraking te komen met de aanpalende disciplines. De traditioneel lineair geordende opleidingen zullen in de bachelorsfase aantrekkelijker gemaakt moeten worden en aangepast moeten worden aan de moderne tijd, waarin studenten bloot staan aan een overvloed van informatie. De kern van de opleiding dient helder te zijn, maar de opleiding moet veel mogelijkheden tot diversificatie bieden. Studenten moeten in staat gesteld worden om met hulp van mentoren een programma samen te stellen uit een breed aanbod van beta-vakken. Dit vergt vernieuwingen in het onderwijs, maar *niet* noodzakelijk nieuwe opleidingen! Dus maatwerk en geen woud van verschillende opleidingen. De beta-waaier zoals de Universiteit Utrecht die hanteert is een goed uitgangspunt.

De nieuwe masterfase biedt enorme mogelijkheden en uitdagingen. Een onsamenhangend aanbod van lokale opleidingen zou wel eens funest voor de wiskunde kunnen worden. Ik acht een goede en nauwe afstemming van de diverse masteropleidingen voor onderzoekers van de verschillende universiteiten essentieel. De gevolgen van zo'n afstemming zouden niet alleen kosmetisch moeten zijn maar gepaard moeten gaan met concentratie en profilering, zodat voor de masterstudenten actieve en stimulerende onderzoeksclusters zullen ontstaan. In het belang van allen, ben ik bereid als Nederlandse wiskundige, deel te nemen aan deze discussie.

Het universitaire klimaat

Naast mijn optimisme over de toekomst van de wiskunde, heb ik grote zorgen over de kwaliteit van het universitaire klimaat. Het systeem van vaste aanstellingen (het tenure-track systeem) aan de universiteiten is diepgeworteld, niet alleen in Nederland, maar in de gehele wereld, en een principieel onderdeel van het systeem. Niet zozeer om na een lange periode van selecties en onderzekerheden de sociale zekerheid veilig te stellen, maar juist om de wetenschappelijke onafhankelijkheid en de wetenschappelijke vrijheid te garanderen. Er zijn voldoende instrumenten aanwezig om de kwaliteit van de wetenschappelijke staf te bepalen, aantallen publicaties en aanbevelingsbrieven zijn een standaard onderdeel van elk bevorderingsbesluit. Deze instrumenten zouden, omgekeerd, ook een rol moeten spelen bij ontslag. Dat wil zeggen, een ontslagbesluit zou vergezeld moeten gaan van een aantal afbevelingsbrieven van gerespecteerde wetenschappers. Een College van Bestuur dat, via haar voorzitter in het Leids Universitair Weekblad Mare van 6 september 2001 zegt 'Aan mensen die hoge prestaties hebben geleverd, is het moeilijk uit te leggen dat ze moeten verdwijnen', moet zich ernstig afvragen of ze als bestuur niet gefaald heeft.

Dankwoord

Ik dank het College van Bestuur, het bestuur van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen en allen anderen die aan de totstandkoming van mijn benoeming hebben bijgedragen voor het vertrouwen dat zij in mij hebben gesteld.

Hooggeleerde Diekmann, beste Odo, graag maak ik gebruik van deze nieuwe gelegenheid om mijn dank aan je uit te spreken. Je geduld en aandacht in de beginfase voor mijn werk, toen ik nog bij AT&T en Philips werkte en 's avonds mijn promotieonderzoek bij jou deed, heeft me veel vertrouwen, en uiteindelijk ook een sterke basis gegeven, van waaruit ik mijn vleugels kon uitslaan. Zonder jou had ik hier niet gestaan.

Hooggeleerde Peletier, beste Bert, we hebben elkaar voor het eerst ontmoet tijdens de receptie na de dubbeloratie van Odo Diekmann en Hans Metz in het najaar van 1986 hier in Leiden. Ik had zojuist onbetaald verlof gekregen om mijn promotieonderzoek af te ronden, maar ik beschikte nog niet over een promotieplaats. Met je bekende enthousiasme reageerde je meteen op mijn verhaal en al snel had je een promotieplaats voor mij aan het Mathematisch Instituut bewerkstelligd. De afgelopen jaren heb ik met veel plezier met je samengewerkt en je enthousiasme voor de wiskunde is een groot voorbeeld voor me.

Hooggeleerde Kaashoek, beste Rien, tijdens mijn promotieonderzoek zeiden Odo Diekmann en ik dikwijls tegen elkaar dat we eigenlijk de artikelen van jouw groep zouden moeten bestuderen. Het heeft even geduurd, maar ik was erg blij dat ik na een aantal jaren in de VS, postdoc en later Akademieonderzoeker bij jou kon worden. Via jou leerde ik Israel Gohberg kennen en samen oefenen jullie een grote invloed op mijn werk uit. Ons gemeenschappelijk werk is een zwaartepunt van mijn onderzoek geworden. Het tijdschrift *Integral Equations and Operator Theory* is in goede handen.

Hooggeleerde Keane, beste Mike, ook jij speelt een belangrijke rol om het universitaire klimaat rond mij op peil te houden. Onze gemeenschappelijke promovendus Bas Lemmens die eerder dit jaar bij ons promoveerde, onze artikelen in voorbereiding en onze plannen voor een nieuwe promovendus, zijn een enorme stimulans voor mij. Ik zou het vreselijk vinden als we je niet voor Nederland kunnen behouden. Ik zal me inzetten dat onze plannen onverkort uitgevoerd zullen worden.

Zonder de inspiratie en steun van mijn buitenlandse coauteurs, Israel Gohberg, Jack Hale, John Mallet-Paret, Volodya Matsaev en Roger Nussbaum, zou ik in het Nederlandse universitaire klimaat niet kunnen overleven. Dank voor jullie vertrouwen op afstand.

Door NWO ben ik via een PIONIER-subsidie in staat gesteld om een groep jonge onderzoekers om me heen te hebben. De postdocs Onno van Gaans, Derk Pik en Vivi Rottschäfer geven me een enorme stimulans. Ik moet alle zeilen bijzetten om jullie bij te houden. De promotiemedewerkers Miguel Frasson, Tycho van Noorden en Bart van de Rotten houden me alert en jong. De komende tijd zal ik er ook weer voor jullie zijn.

Zonder studenten gaat het niet. Door onderwijs in de wiskunde te geven, u te begeleiden bij een afstudeerproject of promotie, hoop ik aan uw vorming bij te dragen. Ik dank jullie allen voor het in mij gestelde vertrouwen.

Lieve familie en vrienden, jullie belangstelling voor mijn leven en werk is bemoedigend. Des te meer realiseer ik me dat tante Margot, van wie ik heb geleerd welk een voorrecht het is om te kunnen reizen, en oom Redbad, van wie ik heb geleerd de wetenschap in een breder perspectief te zien, er deze keer niet meer bij zijn. In een memoriam voor F. Borderwijk, een van mijn favoriete schrijvers, schrijft Oom Redbad op 30 april 1965 in het dagblad Trouw ‘Heel duidelijk treed in al zijn werk terug de figuur die zijn omgeving wil beheersen uit angst voor de chaos en het bederf’. Schrijver, neerlandicus of wiskundige, we streven dezelfde doelen na.

Geachte collegae, studenten, vrienden, familie en andere toehoorders, ik dank u hartelijk voor uw aanwezigheid, en dank u voor uw aandacht.

Ik heb gezegd.

Noten

1 Zie K. Gödel, Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica under verwandter systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38** (1931), 173-198. Een modern interessant werk dat het werk van Gödel in een fascinerende context plaatst is D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: an eternal golden braid* (Vintage Books, New York 1980).

2 Deze definitie kan gevonden worden in *Prisma van de wiskunde: 2000 wiskundige begrippen van a tot z verklaard* (Het spectrum, 1990). Zie T.K. Koornwinder, *Gelijk en ongelijk in de analyse*, (Oratie, Universiteit van Amsterdam, 19 februari 1993) voor een boeiend verslag van de ontwikkelingsgang van het woord analyse.

3 Zie A.P. Youschkevitch, The concept of function up to the middle of the 19th century, *Arch. Hist. Sci.* **16** (1976), 37-85 (p. 70).

4 G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen inhalts* (herausgegeben von Ernst Zermelo, Berlin 1932).

5 Zie The principal works of Simon Stevin, Volume II, Mathematics, edited by D.J. Struik (C.V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1958).

6 Zie het Genesis spacecraft project, http://genesismission.jpl.nasa.gov/.

7 Zie M. Barnsley, *Fractals everywhere* (Academic Press, San Diego 1988).

8 Zie B. Krauskopf and D. Lenstra (editors), *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics* (American Institute of Physics, New York 2000).

9 Zie P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces* (Cambridge University Press, Cambridge 1995).

10 Zie S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, *Fundamenta Mathematica* **3** (1922), p. 133-181.

11 Zie Y.B. Pesin, *Dimension theory in dynamical systems* (The University of Chicago Press, Chicago 1997).

12 Zie R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms* (Springer-Verlag, Berlin 1979), P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff dimension, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **42** (1946), p. 15-23 en D. Ruelle, *Thermodynamic formalism* (Addison-Wesley, Reading 1978).

13 Zie S.A. van Strien en S.M. Verduyn Lunel (editors), *Stochastic and spatial structures of dynamical systems*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Verhandelingen, Afd. Natuurkunde, Eerste Reeks, deel 45 (North-Holland, Amsterdam 1996).

14 Zie J. Mallet-Paret en S.M. Verduyn Lunel, Exponential dichomotomies, Wiener-Hopf factorizations for mixed-type functional differential equations, report MI 2001-17 voor verdere informatie en referenties.

15 Zie K. Kaneko (editor), *Theory and applications of coupled map lattices* (Wiley, Chichester 1993).

16 Zie D.A. Wolf-Gladrow, *Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models* (Springer-Verlag, Berlin 2000).