Aeternitatem cogita

Rede uitgesproken door

H.W. Lenstra, Jr.

bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar
in de fundamentele en toepassingsgerichte wiskunde
aan de Universiteit Leiden op vrijdag 12 mei 2000.

Mijnheer de Rector Magnificus,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Diegenen onder U die hier gekomen zijn om alvast een voorschot op hun weekend te nemen, hebben het bij het verkeerde eind gehad. Het document dat U in handen heeft, maakt duidelijk dat er vandaag nog gewerkt gaat worden, en niet alleen door mij. Iedereen, ook wie zijn bril thuis gelaten heeft, heeft kunnen beslissen rechtsomkeert te maken, maar nou is het te laat. De deur zit dicht, en als U niet bij de les wilt blijven dan rest U weinig anders dan het oplossen van een schaakprobleem.

Achterop de titelpagina van het document ziet U een portret van *Johannes Meursius*. Die leefde aan het begin van de zeventiende eeuw [1579–1639], in de tijd van Van Oldenbarnevelt en het Twaalfjarig Bestand. Hij was professor in de geschiedenis, in de Griekse filologie en in de staatkunde, eerst in Leiden, toen aan een academie voor adellijke jongelieden in Denemarken. Misschien kent U hem wel van een geschiedenis die hij geschreven heeft van de Leidse universiteit, toen die nog nauwelijks geschiedenis *had*. De reden dat ik Meursius hier laat figureren, is dat ik zijn motto tot titel van mijn rede gekozen heb. U ziet het bovenaan: *aeternitatem cogita*, denk aan de eeuwigheid. Het is een mooi motto, waarmee hij wat mij betreft alleen al eeuwige roem verdiend heeft, en daar draag ik door hem te noemen dan het mijne toe bij. Ondertussen heeft de Faam hem een lelijke poets gebakken, want zijn *grootste* roem dankt hij aan een boek dat iemand anders veertig jaar na zijn dood onder zijn naam gepubliceerd heeft. Dat was een in het Latijn geschreven pornografisch meesterwerk. Denk je je hele leven aan de eeuwigheid, en dan gebeurt je dat. Misschien kijkt Meursius daarom zo vrolijk.

Dames en heren, één van mijn Amerikaanse studenten, Jim Borger, vertelde me een keer van een gesprek dat hij met een andere student had. Die andere student studeerde rechten, en Jim vroeg hem waarom hij dat deed. Wel, was het antwoord, daarmee kan ik een goeie baan krijgen. En waarom wil je een goeie baan, vroeg Jim. Nou, dan verdien ik veel geld. En waarom wil je veel geld verdienen? Dan kan ik een grote auto kopen, en een huis, en een vrouw trouwen, en een gezin stichten. (U hoort het wel, dit speelt in Amerika.) En waarom wil je al die dingen? Wel, zei de rechtenstudent, dat maakt mij *gelukkig*. Nou, zei Jim, *ik* studeer wiskunde, en als ik wiskunde doe dan bereik ik hetzelfde in één stap, dan ben ik *direct* gelukkig. En dàt is, dames en heren, waar ik U vandaag een indruk van zal proberen te geven: hoe iemand gelukkig kan worden door het doen van wiskunde.

Het leukste van wiskunde is een bewijs. Wiskunde zonder bewijzen is als voetbal zonder bal. Nu zijn er een boel redenen waarom ik in dit *Groot Auditorium* geen demonstratie voetbal ga geven, maar er zijn erg weinig redenen waarom ik hier geen bewijs zou geven. En de allerslechtste reden is wel dat U het niet leuk zou vinden, want ik ga U immers *leren* om het leuk te vinden, net zoals U een boek of een film leuk kunt vinden. En alle wiskundigen weten: een wiskundevoordracht zonder bewijs is net als een film zonder liefdesscène.

Het bewijs dat ik ga geven komt uit de toegepaste wiskunde. Heel toepasselijk, want zoals ik ontdekt heb, ben ik benoemd tot hoogleraar in de *fundamentele en toepassingsgerichte* wiskunde. Dat is omdat ik midden in de wereld sta. Midden in de *echte* wereld, wel te verstaan. Mijn kennis over de echte wereld ontleen ik aan een andere Amerikaanse wiskundige, die *ook* Jim heet, namelijk Jim Simons. Jim Simons was in de jaren zestig een bekend wiskundige, maar door allerlei toevallige omstandigheden ging hij in zaken. Hij werkt in de wereld van het geld, maar hij heeft altijd contact gehouden met de wereld van de wiskunde. Hij is dus goed in staat om die beide werelden met elkaar te vergelijken, en een paar jaar geleden zei hij daar in een interview [in *The Emissary*, juni 1998, een nieuwsbrief van het *Mathematical Sciences Research Institute* te Berkeley] het volgende over. "In het begin," zei Jim Simons, "vroegen mijn zakenvrienden mij wel eens, hoe voelt dat nou, om in de echte wereld te zijn? Ik zei dan, en dat vind ik nog steeds, dat de wiskundewereld me heel wat echter lijkt dan de zakenwereld. En daarmee bedoel ik, wel, wat is er echt aan een patatkraam? Vandaag is-ie er, en morgen is-ie weg. Maar de gehele getallen, *die* zijn pas echt. Als je een stelling bewijst dan heb je echt iets concreets gedaan, waar geen enkele zakelijke onderneming het wat echtheid betreft tegen kan opnemen." Tot zover Jim Simons.

Over die echte wereld van de gehele getallen wil ik het nu hebben, en de toepassing is een toepassing in de muziektheorie. Het gaat over de *harmonische getallen* van Philippe de Vitry. Als U goed aan de eeuwigheid denkt, dan ziet U aan de jaartallen van De Vitry, 1291–1361, dat De Vitry voor Meursius bijna net zo lang geleden was als Meursius voor ons. En U ziet nou ook de echte reden dat Meursius zo vrolijk kijkt, dat is namelijk omdat hij daar een heerlijke taartpunt met getallen ziet staan. Dat zijn de harmonische getallen. Ik zal U even uitleggen hoe meneer De Vitry die getallen maakte. Eerst schreef hij een 1 op, die ziet U linksboven. Die 1 verdubbelde hij, dat gaf 2, en die schreef hij eronder. Die 2 verdubbelde hij weer, dat gaf 4, en die staat *daar*onder. Als je zo blijft verdubbelen, dan krijg je de getallen in de voorste kolom: 1, 2, 4, 8, 16, 32, enzovoort. Dat zijn de zogenaamde *machten van* 2. Op dezelfde manier heb je de *machten van* 3, die je krijgt door steeds met 3 te vermenigvuldigen in plaats van met 2. Dan krijg je de getallen die bovenaan staan: 1, 3, 9, 27, et cetera. De rest van de getallen in de tabel krijg je door 2en en 3en te combineren. Als je bijvoorbeeld van de 9 die bovenaan staat naar onder gaat dan zie je dat er opnieuw steeds met 2 vermenigvuldigd wordt: 18, 36. En als je van de 8 die links staat naar rechts gaat wordt er steeds met 3 vermenigvuldigd. Op die manier krijg je de harmonische getallen. Een wiskundige zou zeggen: een harmonisch getal is een macht van 2 vermenigvuldigd met een macht van 3. Ik heb ze alleen onder de duizend opgeschreven, maar er zijn er natuurlijk oneindig veel van, en aan die oneindigheid zitten we met Meursius steeds te denken.

Wat De Vitry wilde, was om twee harmonische getallen te vinden die maar 1 schelen. Daarvan zie je er een paar in de tabel zitten, bijvoorbeeld **3** bovenaan, en **4** een paardensprong daarvandaan. En je hebt ook **8** en **9**. Maar als je wat verder zoekt dan zul je in de tabel alleen maar een paar kleintjes vinden: **1** en **2**, en **2** en **3**. Wat Philippe de Vitry zich nou afvroeg, was: *zijn* er geen andere, of is de tabel niet groot genoeg?

Als U nou een wiskundige bent, dan gaat U op dit moment vlijtig aan het rekenen. Of misschien wel aan het nadenken, dat hangt ervan af. En als U geen wiskundige bent dan denkt U: waarom, in vredesnaam, wilde hij dat weten? Daar kan ik U wel wat over vertellen. Philippe de Vitry was een edelman uit het noorden van Frankrijk, en hij was één van de intellectuele zwaargewichten van zijn tijd. Dat was in de late Middeleeuwen. Aan het eind van zijn leven was hij bisschop, maar hij is het bekendst geworden als componist en als muziektheoreticus. Hij stond in de klassieke traditie, die teruggaat op Pythagoras, die zegt dat muziek een onderdeel van de rekenkunde is. "Muziek is het hoorbaar gemaakte getal" [Boethius]. Harmonische getallen die 1 schelen geven muzikaal interessante intervallen: een octaaf correspondeert met de verhouding **2** : **1**, een kwint met **3** : **2**, een kwart hoort bij **4** : **3**, en een hele toon bij **9** : **8.** Geen wonder dat De Vitry wilde weten of er nog meer zulke 'harmonische tweetallen' waren. Hij zal de tabel nog wat groter gemaakt hebben, maar hij moest *ergens* ophouden, en hij vond geen nieuwe. Ook als je het met een computer doet moet je ergens ophouden, en als je geen nieuwe vindt kom je vanzelf op de vraag: kun je misschien *bewijzen* dat die er helemaal niet *zijn*? Daar helpt een computer niet bij, want die kan niet aan oneindig denken, dat blijft mensenwerk.

De Vitry vroeg eens rond, en op een gegeven moment kwam zijn vraag terecht bij een andere Fransman, een geleerde rabbi uit de Provence, in het *zuiden* van Frankrijk. (U zult wel denken, alweer een persoon van het mannelijk geslacht. Inderdaad heel eigenaardig.) Deze rabbi staat onder vele namen bekend, maar tegenwoordig gebruikt men vooral een Latijnse versie van zijn Hebreeuwse naam, namelijk *Gersonides.* Gersonides was, net als De Vitry, één van de grootste geleerden die er op dat moment rondliepen. Hij deed wiskunde, sterrenkunde en wijsbegeerte. Hij heeft commentaren op verschillende bijbelboeken geschreven. In een passage van het Hooglied van Salomo ziet hij bijvoorbeeld een allegorie op het verwerven van wiskundige kennis.

Zoals U op de volgende pagina ziet kon Gersonides de vraag van De Vitry beantwoorden. Hij bewees dat de enige harmonische tweetallen, zoals ik ze nou maar noem, de vier tweetallen zijn die we al ontdekt hadden: **1** en **2**, **2** en **3**, **3** en **4**, en **8** en **9**. Dat er niet meer zijn is misschien niet zo opmerkelijk, maar het is *wel* opmerkelijk dat hij het kon *bewijzen.* Zijn bewijs geeft je absolute zekerheid dat hoe ver je ook gaat rekenen, je nooit weer een nieuw harmonisch tweetal vindt.

De vorige keer dat ik over het bewijs van Gersonides gepraat heb was voor een gehoor van slimme middelbare scholieren uit Silicon Valley, en ik dacht, dan kan ik het in deze vermaarde universiteitsstad ook wel vertellen. Het bewijs is ten slotte heel wat ouder dan de universiteit, en ik zie dat er wat kinderen in de zaal zitten.

Eerst zei Gersonides, kijk eens naar die tabel met getallen. Welke zijn er even, en welke oneven? Dat zie je direct: afgezien van de getallen in de bovenste rij zijn ze allemaal even. Dat is natuurlijk geen wonder, want je krijgt ze door het getal dat erboven staat te verdubbelen. Stel nu dat twee getallen in de tabel 1 schelen. Dan kunnen ze niet allebei even zijn, dus één van beide moet in de bovenste rij staan. Op dezelfde manier, als je kijkt welke getallen deelbaar door 3 zijn, dan zie je dat ook één van je getallen in de voorste kolom moet staan. Dus nou weten we al: als je een harmonisch tweetal hebt, dan staat één van beide in de bovenste rij, en is dus een macht van 3, en de ander staat in de voorste kolom; die is dus een macht van 2. Dat is al een hele vereenvoudiging, ook als je je computer wilt laten zoeken.

Er zijn nu twee gevallen: de macht van 3 is de kleinste van de twee, of het is de grootste van de twee. Die twee gevallen heb ik in moderne symbolen onder de stelling van Gersonides opgeschreven. In het eerste geval wordt de *m*de macht van 3 als je er 1 bij telt gelijk aan de *n*de macht van 2, en in het tweede geval als je er 1 aftrekt. Als U niet gewend bent aan het lezen van formules dan kunt U daar gelukkig zonder dat het opvalt snel wat aan doen. Op de tegenoverliggende pagina wordt namelijk uitgelegd hoe we die machten van 3 schrijven. Je schrijft gewoon het aantal 3en schuin rechts boven de 3, bijvoorbeeld, op de derde regel van onder, 3 met die 4 bovenaan ("drie tot de vierde", of "drie tot de macht vier") staat voor 3 maal 3 maal 3 maal 3, dat is 81.

We zien daar ook al het volgende slimme idee van Gersonides. Hij kijkt namelijk wat er gebeurt als je zo'n macht van 3 door 8 deelt. Waarom, zult U vragen? Wat heeft 8 ermee te maken, en waarom moeten we daardoor *delen*? Het antwoord is dat we genieën niet naar hun motivatie moeten vragen. De rede heeft zijn redenen die het hart niet kent. Hij doet dat omdat het werkt, punt uit. Delen door 8 dus. Als we 81 appels onder 8 kinderen willen verdelen, dan krijgt elk kind 10 appels, en er blijft een rest van 1 appel over: $81 = 10 \times 8 + 1$. Het zal de meeste kinderen te doen zijn om die 10 appels die ze krijgen, maar als ze in deze zaal zitten dan zijn ze juist in de *rest* geïnteresseerd, en die is 1. Als je hetzelfde doet met de andere machten van 3, zoals ik op dit velletje gedaan heb, en je kijkt naar de rest die je overhoudt, dan zie je iets opmerkelijks: de rest is afwisselend 1 en 3. Maar als je dat eenmaal ontdekt hebt, dan is de reden daarvan niet moeilijk te vinden: iedere regel krijg je uit de vorige door met 3 te vermenigvuldigen. Als je driemaal zoveel appels verdeelt dan krijgt iedereen driemaal zoveel, en je houdt driemaal zoveel over. Als de rest 1 was dan wordt hij 3, en als de rest 3 was dan wordt hij eerst 9, maar dan geef je iedereen een extra appel, en je houdt 1 over. Dus na iedere 1 krijg je een 3 en na iedere 3 een 1, en de 1en en 3en wisselen elkaar tot in het oneindige af. Wiskundigen zijn dol op dat soort periodieke verschijnselen, want ze geven je één manier om de oneindigheid te controleren.

Ik heb op de volgende pagina deze ontdekking samengevat: 3^m heeft rest 1 of 3 al naar gelang *m* even of oneven is. Als ik zeg *rest*, dan bedoel ik: rest bij deling door 8. Ik heb er tegelijk maar bij gezet wat er gebeurt als je hetzelfde doet met machten van 2. Dat is eigenlijk nogal flauw. De 0de, 1ste en 2de macht van 2 zijn 1, 2 en 4. Die zijn kleiner dan 8, dus gelijk aan hun eigen rest. En de 3de en hogere machten van 2 zijn allemaal deelbaar door 8, dus ze hebben rest 0.

Met deze eenvoudige wijsheid kunnen we nu tegelijk het eerste geval van Gersonides afhandelen. Stel dat ik een macht van 3 heb die gevolgd wordt door een macht van 2, dus $3^m + 1 = 2^n$. We weten dat de rest van 3^m gelijk aan 1 of 3 is. Tel daar 1 bij, dan is de rest van 2^n kennelijk 2 of 4. Maar we weten ook dat de rest van 2^n alleen 2 of 4 kan zijn als 2^n *zelf* gelijk is aan 2 of 4; en dan moet 3^m, die 1 minder is, gelijk zijn aan 1 of 3. Dat geeft de harmonische tweetallen **1**, **2** en **3**, **4**. Die kenden we al. Daarmee is het eerste geval klaar.

U ziet hoe makkelijk dat werkt, die resten bij deling door 8. Je kunt er in één keer oneindig veel situaties tegelijk mee afhandelen, omdat je maar eindig veel resten kunt hebben. Maar de methode werkt niet altijd. Dat zien we als we het tweede geval ook zo proberen te doen. Dan is 3^m *min* 1 gelijk aan 2^n. De rest van 3^m is 1 of 3, al naar gelang m even of oneven is, en trekken we daar 1 van af dan zien we dat 2^n rest 0 of 2 moet hebben. Rest 2 gaat weer net zo: dan is 2^n gelijk aan 2, en 3^m (die 1 meer is) moet 3 zijn; dat geeft het harmonische tweetal **2**, **3.** Maar met rest 0 weten we alleen dat n minstens 3 is, en dat m *even* moet zijn. Dat laat oneindig veel gevallen over. Dat is een probleem waar we wat op moeten bedenken.

Velen van U hebben op school geleerd dat $a^2 - b^2$ gelijk is aan $a - b$ maal $a + b$. Dat heette vroeger een *merkwaardig product*. Nu heeft U daar eindelijk wat aan. Kijk namelijk naar $3^m - 1$. We weten dat m even is, en daaruit volgt dat 3^m een kwadraat is. Het is namelijk wat je krijgt als je een *even* aantal 3en met elkaar vermenigvuldigt, dus je kunt het ook krijgen door eerst *half* zoveel 3en met elkaar te vermenigvuldigen, en het resultaat met zichzelf te vermenigvuldigen. Met andere woorden: 3^m is het kwadraat van $3^{m/2}$. Ook 1 is een kwadraat, 1 is 1 maal 1, dus $3^m - 1$ kun je schrijven als $a^2 - b^2$. Ons formuletje van school toont dus aan dat $3^m - 1$ gelijk is aan $3^{m/2} - 1$ maal $3^{m/2} + 1$, en dat is wat ik heb opgeschreven. Dat getal is een macht van 2, en als twee getallen vermenigvuldigd een macht van 2 geven dan zijn het zelf *ook* machten van 2. In het bijzonder is $3^{m/2} + 1$ een macht van 2. En dat is wel heel verbazend, want een macht van 3, plus 1, die een macht van 2 is, dat is net het eerste geval dat we een paar minuten geleden hebben afgehandeld! Dat bleek maar op twee manieren te kunnen: $m/2$ is 0 of 1. Alleen de laatste kunnen we nu gebruiken: een half m is 1, dus m is 2, en dan is 3^m gelijk aan 9. Dat geeft ons laatste harmonische tweetal **8**, **9**.

Dat is het einde van het bewijs. Ik vind het zelf erg leuk om te zien hoe je in het tweede geval het bewijs afmaakt door een zijsprongetje te maken naar het eerste geval.

Dames en heren, mij is onlangs door de Leidse wiskundestudenten de *Onderwijsprijs 1999* uitgereikt, en dat was onder andere, zoals zij het formuleerden, omdat ik over zo'n grote *overredingskracht* zou beschikken. Hoe twijfelachtig dat compliment is voor een wiskundige kunt U goed zien aan het bewijs dat ik net gegeven heb: ik heb namelijk geen enkele reden om te proberen U te gaan overtuigen dat het bewijs klopt, het bewijs zou niks waard zijn als U zich er zèlf niet van kon overtuigen dat het klopt. En dat *kunt* U, dat kan iederéén die niet te lui is om na te denken.

Aan het begin van deze rede citeerde ik Jim Simons, die zei "als je een stelling bewijst dan heb je echt iets concreets gedaan." Misschien begrijpt U nu wat hij daarmee bedoelt. We begonnen met een heel concrete vraag van Philippe de Vitry, waar hij het antwoord wel op vermoedde, maar niet zeker wist. Door een puur logische redenering heeft Gersonides aan die onzekerheid een finaal einde gemaakt. We zijn er daardoor rotsvast van overtuigd geraakt, zonder een schijn van twijfel, dat we nooit meer een extra harmonisch tweetal zullen tegenkomen, onafhankelijk van hoever we de tabel voortzetten. Als je zo'n redenering hebt gevonden, dan heb je echt iets gedaan. Als je dat in 1342 doet, dan praten de mensen er in het jaar 2000 nog over. Je hebt dan een monument voor jezelf opgericht dat duurzamer is dan brons.

U kunt zich voorstellen dat het aanleiding geeft tot grote tevredenheid als je zo'n bewijs in elkaar hebt gesleuteld. Dat is zó leuk, dat je het nòg een keer wilt doen. En dat is makkelijk mogelijk, er zijn eindeloos veel richtingen waarin je verder kunt gaan. Bijvoorbeeld, wat gebeurt er als je twee harmonische getallen zoekt die niet 1 schelen, maar een ander getal, bijvoorbeeld 13? En als je hetzelfde spelletje gaat spelen met je *eigen* soort harmonische getallen, waarin je bijvoorbeeld ook machten van 5 toelaat? Het trucje van Gersonides dat ik U heb uitgelegd is op veel van dat soort problemen van toepassing, en op een gegeven ogenblik vindt U het geen trucje meer maar een *methode*. Een methode is een trucje dat vaker werkt. Na een tijdje wordt het zo'n routinekwestie dat de aardigheid er een beetje afgaat, en dat is het moment dat je je meer gaat interesseren voor de gevallen waarin de methode *niet* werkt. Voor die gevallen moet je namelijk een nieuw trucje bedenken, dat trucje daar moet je een methode van maken, en dan ga je kijken welke grenzen dááraan gesteld zijn. En zo ga je door. Maar in welke richting je ook loopt, je komt altijd vrij snel terecht bij de grenzen van wat wiskundigen op het ogenblik kunnen, en *dat* zijn dan de grenzen die verlegd moeten worden. Als je je beperkt tot problemen die lijken op het probleem van De Vitry, dan is de brandendste vraag op het moment het zogenaamde *abc-vermoeden*. In plaats van $3^m + 1 = 2^n$ kijk je dan heel algemeen naar $a + b = c$, waar a, b en c getallen zijn die nog aan speciale voorwaarden moeten voldoen. Ook de laatste stelling van Fermat, over $x^n + y^n = z^n$, is een speciaal geval van het *abc-vermoeden*, behalve dan dat de stelling van Fermat bewezen is, en het *abc*-vermoeden niet. Voor een boel mensen is het *abc*-vermoeden de Heilige Graal van de moderne getaltheorie, net als de stelling van Fermat dat vroeger was. Misschien duurt het nog een paar honderd jaar voor we die graal te pakken hebben, maar dan hebben we er weer voor een eeuwigheid plezier van. Wat dat *abc*-vermoeden precies inhoudt heb ik in Silicon Valley wel uitgelegd, maar hier wil ik nu over iets anders praten.

Dames en heren, als er in Hilversum een nieuwe studio verrijst, dan staat er niet lang daarna een bespreking van in de krant, waarin op de architectonische verdiensten van het nieuwe gebouw wordt ingegaan. Ook het verschijnsel van recensies van nieuw verschenen dichtbundels zal U bekend zijn. Ik wil het in de rest van deze rede hebben over een wat minder beoefend literair genre, namelijk over recensies van wiskundige bewijzen. Hiermee bedoel ik niet de technische besprekingen en samenvattingen die in de vakpers verschijnen, maar besprekingen van hoe leuk en mooi en opwindend een bewijs is. Ik wil een aantal elementen aandragen die onze appreciatie voor een bewijs bepalen. Op die manier hoop ik U, zoals elke gewetensvolle schoolmeester betaamt, wat goede smaak op dit gebied bij te brengen, zodat we daar in de toekomst niet te veel over hoeven te twisten, en zodat U weet hoe U er in beschaafd gezelschap over moet praten. Bovendien, zoals iedere kunsthandelaar weet: hoe meer je je klant ergens over vertelt, des te leuker gaat hij het vinden, en des te makkelijker kun je het hem verkopen.

Het allereerste waar je bij een bewijs op moet letten is dat het inderdaad een *bewijs* is. Het moet kloppen. Als het niet klopt, valt alles weg. Sommige mensen vinden een Rietveldstoel mooi, hoewel je er niet eens in kunt zitten. In de wiskunde komt dat niet voor. Een bewijs met een fout erin is net als een blikopener die het niet doet, het is gênant, het is een blamage voor degeen die het ding ontworpen heeft. Een fout bewijs kan heel opwindend zijn zolang je de fout niet gevonden hebt, maar daarná wil je er liever niet aan herinnerd worden. Het kan natuurlijk zijn dat de fout heel interessant was, en heel leerzaam, maar *leuk* is toch iets anders.

Laat ik er nu voor het vervolg van uitgaan dat we het over een bewijs hebben dat echt klopt, zoals het bewijs van Gersonides. Er zijn mensen voor wie *dat* alleen al iets moois heeft, het heeft net zoiets bevredigends als een mechanisme dat werkt: ieder onderdeel heeft het vereiste effect, en alles grijpt precies in elkaar. Maar dat is voor bewijzen nog maar het begin.

Ik wil het eerst over het 'romantische' element van een bewijs hebben, en dat wil ik doen aan de hand van het schaakprobleem waar velen van U al een tijdje naar hebben zitten staren. In feite is het geen schaakprobleem, maar een *eindspelstudie*, en het is 'gecomponeerd' (zoals dat heet) in 1928. Mijnheer de Rector Magnificus, stel dat U een keer een hoogleraar in het schaken benoemt, in het fundamentele en toepassingsgerichte schaken. Daar hoeft U niet om te lachen, ik was twee weken geleden in Maastricht, en daar *hebben* ze inderdaad een hoogleraar in het schaken. Ze noemen het alleen *kunstmatige intelligentie. Kunstmatige* intelligentie, degeen die *die* term bedacht heeft wist kennelijk dat je het niet met *echte* intelligentie moet verwarren. Maar goed, *stel* dat U een hoogleraar in het schaken benoemt. Als die nieuwe hoogleraar dan haar oratie houdt (U hoort het wel, fictieve personen zijn vrouwelijk), dan kan zij zonder moeite drie kwartier over deze eindspelstudie praten. Ik weet niet hoevelen van U al denken dat ze hem opgelost hebben, maar ook voor diegenen onder U die de spelregels van het schaken niet kennen kan ik makkelijk in globale termen de oplossing beschrijven. (Zelf lees ik altijd met rode oortjes de bridgerubrieken in de krant, hoewel ik de spelregels van het bridgen niet ken.) Als je naar de positie kijkt, dan zie je direct dat wit een beetje in de problemen zit, zeker als hij wil winnen. Maar als je wat meer ervaring in het schaken hebt, dan zie je ook vrij snel een mooie manoeuvre die wit kan uitvoeren. Dat is net als die deling door 8 in het bewijs van Gersonides—beginnelingen vinden dat een mysterieuze stap, maar voor experts is het gesneden koek. Als wit die manoeuvre uitvoert, dan lijkt het eerst dat hij daarmee regelrecht wint. Maar als je beter kijkt, dan blijkt dat zwart zich op een geniepige manier voor wit kan verstoppen. Dat zagen we ook in het bewijs dat ik U verteld heb: er was een geval waarin we nog oneindig veel mogelijkheden overhielden, en in dat geval hebben we een zijsprongetje gemaakt. In de eindspelstudie gebeurt hetzelfde: om zwart toch op de knieën te krijgen, voert wit op het kritieke moment een *briljante* zet uit, een zet die iedereen van zijn bank doet vallen van verbazing (ik zal dus maar niet zeggen welke het is), en zwart kan direct opgeven.

U begrijpt uit deze beschrijving al dat ons bewijs wat dit romantische aspect betreft redelijk goed scoort. Het is beslist zo dat een bewijs leuker wordt naarmate er meer verrassingen in zitten, kunstgrepen die uit het niets komen en toch blijken te werken. Nou moet hier wel bij gezegd worden dat wat voor de één een verrassing is, voor de ander een flauwiteit is. Als je je op dezelfde manier drie keer hebt laten verrassen, dan is het de vierde keer geen echte verrassing meer. Als je honderden van die eindspelstudies hebt opgelost, dan heb je de meeste briljante wendingen wel gezien, en dan word je steeds kieskeuriger. Op een gegeven moment is het de moeite niet meer waard, en je houdt ermee op. Zo is het *mij* althans gegaan, met die eindspelstudies. Maar met de wiskunde is het anders. Hoe diep je er ook in duikt, op ieder niveau kom je weer eindeloos veel verrassingen tegen. Over al die verrassingen wil je nadenken, je wilt ze begrijpen, je wilt om zo te zeggen de truc tot methode verheffen. Als je een wonder *begrijpt*, dan ben je in staat het tot je eigen voordeel aan te wenden. Pas als je snapt hoe een vogel kan vliegen, kun je een vliegtuig bouwen.

Nu ik toch een vergelijking met schaken trek, wil ik ook iets over de *gedwongenheid* van een bewijs zeggen. Net zoals je zwart figuurlijk in een hoek dwingt zodat hij alleen nog maar kan opgeven, zo kunnen je harmonische tweetallen ook geen kant meer uit, ze worden allemaal gevangen. Maar dat is niet wat ik met gedwongenheid bedoel. Bij een schaakprobleem betekent het juist dat de *wit*speler geen keus heeft. Een briljante zet wordt al heel wat minder opwindend als je ook op een veel gewonere manier kunt winnen. Op dezelfde manier is een briljante kunstgreep in een bewijs niet zo indrukwekkend als het op z'n janboerenfluitjes óók wel lukt. Hoe scoort ons bewijs op deze schaal? Waren die delingen door 8 echt nodig? En dat zijsprongetje aan het eind? Het antwoord is *nee*. Wat Gersonides *echt* deed was ook een beetje anders. Het kwam erop neer dat hij niet keek naar de rest als je door *acht* deelt, maar als je door *tachtig* deelt. Dat werkt direct, zoals U zelf mag nagaan. Dat zijsprongetje was misschien wel elegant, maar het was niet *nodig*.

In het algemeen komt het in de wiskunde zelden voor dat een bepaald resultaat maar op één manier bewezen kan worden. Wiskundigen die een bepaald bewijs willen begrijpen zitten het ook vaak eindeloos te herschikken en anders te formuleren, zodat je na een tijdje helemaal niet meer ziet dat het om hetzelfde bewijs gaat. Bovendien, wanneer noem je twee bewijzen *hetzelfde*? Als je een bewijs dat in het Nederlands geschreven is in het Frans vertaalt, dan krijg je natuurlijk weer hetzelfde bewijs, alleen anders uitgedrukt. En ook als je het daarna weer terugvertaalt is het niet veranderd. Dat moet je met een gedicht niet proberen. Maar wat gebeurt er als iemand een meetkundig bewijs in algebraïsche termen vertaalt, op de manier die Descartes ons geleerd heeft, of andersom? Gaat het dan om een ander bewijs? Als je oppervlakkig kijkt denk je van wel, maar als je het doorziet dan weet je van niet. Soms zijn twee bewijzen hetzelfde zonder dat iemand het weet.

Een andere verdienste zit in *zuinigheid*. In de eindspelstudie waar ik het over gehad heb, is een bepaald idee uitgedrukt met maar *zes* stukken op het bord, en die spelen allemaal een rol. In een goed gedicht zit geen woord te veel. Zo is het met een goed bewijs ook, je koerst zonder overbodige omwegen op het doel af, en je gebruikt alleen middelen die je echt nodig hebt. Dat is een grote verdienste. Het geldt ook als lelijk om te veel verschillende gevallen te onderscheiden, wiskunde is niet hetzelfde als puzzelen. Het is veel beter, en meestal ook begrijpelijker, als je alle gevallen allemaal onder één hoedje kunt vangen.

Er is een andere manier waarop bewijzen zuinig zijn, en dat is in de stof waarvan ze gemaakt zijn. Die stof is er namelijk helemaal niet, bewijzen zijn erg goed voor het milieu, ze zijn gemaakt van hersenspinsels. Natuurlijk werden ze tot voor kort doorgaans gedrukt op papier, maar niemand zal willen beweren dat bewijzen uit *inkt* bestaan. Zoals ik net al zei, zitten bewijzen ook niet vast aan één of andere taal, ze stijgen daarbovenuit. Toon Hermans heeft zijn hele leven vergeefs geprobeerd een carrière in Amerika te maken. Als ikzelf in Amerika praat, dan vinden de mensen het net zo leuk als hier. Ik heb al gezegd dat een bewijs duurzamer dan brons kan zijn, men kan zelfs zeggen: duurzamer dan de gedichten van Horatius.

Ik wil het ook over de *diepte* van een bewijs hebben. Laat ik U eens vertellen wat er gebeurt als ik de vraag van De Vitry, over harmonische tweetallen, als sommetje aan een professionele wiskundige opgeef. Negen van de tien wiskundigen zien niet zo gauw hoe het moet. En als ik het ze dan laat zien, zeggen ze: oh, het is *triviaal*! En daarmee bedoelen ze dat het niet *diep* is, dat wil zeggen dat het niet gebruik maakt van ingewikkelde theorieën, en dat het eigenlijk een beetje een belediging is dat ik ze het probleem durf voorleggen. Het is met de diepte van een bewijs net als met het verrassingselement, het is verschillend van persoon tot persoon. Wat voor de één diep is, is voor een ander, die die ingewikkelde theorieën goed kent, maar oppervlakkig. Misschien denkt U dat diepte op gespannen voet staat met zuinigheid, maar dat is maar in beperkte mate het geval. Vaak is het gewoon *nodig* om zo'n ingewikkelde theorie aan te roepen. Soms is het niet *echt* nodig, maar leidt het wel tot meer inzicht.

Je kunt je nu afvragen, wat is er *leuk* aan een diep bewijs? Wat is er leuk aan om een ingewikkelde theorie toe te passen? En het antwoord is: je hebt jarenlang gezwoegd om die theorie te begrijpen, en nu heb je er eindelijk wat aan. Eindelijk kun je er een probleem mee oplossen dat er ook al was voor je die theorie kende. Eindelijk weet je, waarom je collegegeld betaald hebt. Dat is leuk. En het is ook leuk om theorieën uit een andere hoek van de wiskunde toe te passen, want dat bevestigt het gevoel dat alle wiskundigen hebben, dat de hele wiskunde bij elkaar hoort, en één groot geheel vormt. Het bevestigt ook dat je niet een of ander zijpaadje bent ingewandeld.

Als ik een brave indruk op U wil maken, dan moet ik ook zeggen dat het leuk is als een bewijs *nuttig* is. Tot op zekere hoogte is het dat ook wel. Als je de grondgedachte van een bewijs goed begrijpt, dan kun je ook andere omstandigheden herkennen waarin je dezelfde gedachte kunt gebruiken. Dat levert dan weer een nieuw bewijs, en dat is leuk. Het gaat hier dus om het nut *binnen de wiskunde* zelf. Wat betreft het nut *buiten* de wiskunde, daar heb ik niet zoveel braafs te melden. Het komt vaak voor dat één of andere theorie om zuiver wiskundige redenen ontworpen wordt, en dat dan veel later blijkt dat die theorie ook in de gewone maatschappij nuttig is. Dan denk ik: ha, de zuivere wiskunde liep hier op de maatschappij vooruit; en dat vind ik leuk. En het is al heel wat als iets dat je voor je plezier doet ook *nuttig* kan zijn, met schaken en poëzie heb je dat niet. Maar het gebeurt ook vaak andersom, dat de maatschappij met wiskundige problemen komt die we in de wiskunde nog niet tegengekomen waren. Hoe leuk *dat* is, verschilt sterk van geval tot geval. Sommige van die problemen zijn erg leuk om over na te denken, van andere hoop ik dat ze leuk zijn voor andere mensen.

Dames en heren, niet al te veel mensen willen tegenwoordig wiskunde studeren. Wij staan te popelen hele hordes jongelieden lepels vol van de mooiste wiskunde toe te dienen, en er komt maar een handjevol opdagen. Velen vinden dat daar wat aan gedaan moet worden, maar men weet niet wat. Het is geen *wiskundig* probleem, en ik zit er dus ook niet de hele dag over na te denken. Maar er zijn vele *beleidsmakers* en *onderwijsvernieuwers* die er *wel* over nadenken. Hier is een suggestie. Geef ééns in de zoveel tijd deze beleidsmakers en onderwijsvernieuwers een halfjaar of een jaar vrij, zodat ze aan *éducation permanente* kunnen doen. Maak het aantrekkelijk voor ze om wiskunde te gaan studeren. Het mes snijdt dan aan twee kanten. Ten eerste zitten onze collegezalen weer vol, en we zullen ze leren wat ik U vandaag verteld heb. We leren ze dat wiskunde altijd dezelfde regels volgt en toch altijd zichzelf vernieuwt, en dat die vernieuwing plaatsvindt zonder dat eerdere dingen worden afgebroken. Heel anders dan in andere kunsten en wetenschappen. En ten tweede, als deze mensen dan helemaal van het tijdloze karakter van de wiskunde zijn doordrongen, en ze komen terug op hun werk, dan denken ze misschien wel: ach, weinig studenten, dat zijn toch maar twintigste-eeuwse zorgjes, laat ik liever eens gaan kijken of ik niet dat *abc*-vermoeden kan bewijzen.

Aan het einde gekomen van mijn *Lof van het bewijs*, betuig ik mijn dank aan het College van Bestuur en aan het bestuur van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen voor hun besluit mij tot hoogleraar te benoemen, en ook aan alle andere personen en instanties die aan de totstandkoming van deze benoeming hebben bijgedragen. Hierbij wil ik speciaal noemen degeen die ik volgens het protocol moet aanspreken met *Hooggeleerde Van Zwet, beste Willem.* Willem, ik ben, meer dan dertien jaar geleden, naar Amerika gegaan omdat ik bang was in Nederland in slaap te vallen tot het pensioen erop volgt. Jijzelf illustreert dat een mens goed wakker blijft als hij zo nu en dan in Amerika is. Ik bleef *ook* goed wakker. Misschien is dàt wel waarom je me terug hebt gehaald. Je hebt me in ieder geval doen inzien hoe ik ook in Nederland wakker kan blijven. Daar ben ik blij om. Ik ben ook blij dat mij zo vaak de gelegenheid wordt geboden mijn leven een andere wending te geven. Dankjewel.

Hooggeleerde Oort, beste Frans. Ik vertelde net waarom ik naar Amerika ben gegaan. Dat was dus *niet*, anders dan men wel eens denkt, om zo *ver* mogelijk van jou af te zijn. Maar de eerlijkheid gebiedt te zeggen dat ik ook niet ben teruggekomen om weer dichter *bij* jou te zijn. Aan de andere kant, ik heb geruchten opgevangen dat jij na je aanstaande emeritaat naar Leiden gaat verhuizen, en ik ben er zeker van dat dat niet is om dichter bij *mij* te zijn. Maar je bent *vandaag* wel terwille van mij naar Leiden gekomen, en dat stel ik bijzonder op prijs, want dat geeft me de gelegenheid om in het openbaar te zeggen hoeveel ik aan je te danken heb. Het had weinig gescheeld, of ik had niet in Amsterdam maar in Groningen gestudeerd. Achteraf dank ik de hemel dat dat niet gebeurd is. In Amsterdam belandde ik midden in de wereld van de echte wiskunde, en die werd voor mij gepersonifieerd in jou, en in Nico Kuiper. Veel dingen die je me geleerd hebt zijn deel van mijn persoonlijkheid geworden. Veel andere dingen, daar kon ik niet bij. En sommige dingen meende ik zelfs beter *anders* te doen. Frans, als het waar is dat je naar Leiden gaat verhuizen, dan hoop ik dat je vaak langskomt, want er is nog veel wiskunde te doen.

Mijn laatste woord wil ik richten tot de bevolking van het Mathematisch Instituut—tot iedereen, zowel de wiskundigen als de aspirant-wiskundigen, zowel de bestuurders als de ambtenaren en secretaresses—en ook tot de andere wiskundigen in Nederland met wie ik de laatste jaren contact heb gehad, in het bijzonder de getaltheoretici. In deze rede heb ik al éénentwintig keer het woord *leuk* gebruikt, en daar komen er nu een paar bij. Dat is niet alleen omdat het bij jullie zo'n, eh, *plezierige* boel is. Eén van de leuke eigenschappen van bewijzen waar ik in deze rede niet op in ben gegaan is dat ze geen geld kosten. Er zijn ook leuke dingen die *wel* geld kosten, en door een gelukkige omstandigheid ben ik in staat gesteld dat soort leuke dingen *ook* te doen. Het *bedenken* van dergelijke dingen is inmiddels uitgegroeid tot een belangrijke nevenactiviteit van mijzelf en van een aantal mensen in mijn omgeving. Maar *wat* er ook bedacht wordt, ik krijg steeds van iedereen de volste en meest enthousiaste medewerking. Dat stel ik zeer op prijs, en ik zal proberen er geen misbruik van te maken. Als we zo doorgaan, zal het eind van de leuke dingen nog een eeuwigheid weg zijn.

Ik heb gezegd.


ÆTERNITATEM COGITA.
IOANNES MEURSIUS,
Historiarum et Græcæ Linguæ Professor.

De *harmonische getallen* van Philippe de Vitry (1291–1361):

1	3	9	27	81	243	729
2	6	18	54	162	486	
4	12	36	108	324	972	
8	24	72	216	648		
16	48	144	432			
32	96	288	864			
64	192	576				
128	384					
256	768					
512						

Gersonides (1288–1344)
bewees in 1342:

als twee harmonische getallen 1 schelen, dan zijn het **1** *en* **2**, *of* **2** *en* **3**, *of* **3** *en* **4**, *of* **8** *en* **9**.

Twee gevallen:

$$3^m + 1 = 2^n$$

$$3^m - 1 = 2^n$$

Resten bij deling door 8:

$$
\begin{aligned}
3^0 &= 1 &&= 0 \times 8 + 1 \\
3^1 &= 3 &&= 0 \times 8 + 3 \\
3^2 &= 9 &&= 1 \times 8 + 1 \\
3^3 &= 27 &&= 3 \times 8 + 3 \\
3^4 &= 81 &&= 10 \times 8 + 1 \\
3^5 &= 243 &&= 30 \times 8 + 3 \\
3^6 &= 729 &&= 91 \times 8 + 1
\end{aligned}
$$

3^m heeft rest 1 of 3
al naar gelang m
even of oneven is.

2^n heeft rest 1, 2, 4 of 0
al naar gelang n
0, 1, 2 of tenminste 3 is.

Veronderstel $3^m + 1 = 2^n$.
3^m heeft rest 1 of 3,
dus 2^n heeft rest 2 of 4,
dus $n = 1$ of $n = 2$.

Dat geeft de harmonische
tweetallen **1**, **2** en **3**, **4**.

Veronderstel $3^m - 1 = 2^n$.

3^m heeft rest 1 of 3,

dus 2^n heeft rest 0 of 2,

dus n is tenminste 3 of $n = 1$.

$n = 1$ geeft het tweetal **2**, **3**.

Als n tenminste 3 is

dan is m *even*.

$(3^{m/2} - 1) \times (3^{m/2} + 1) = 3^m - 1$

is een macht van 2,

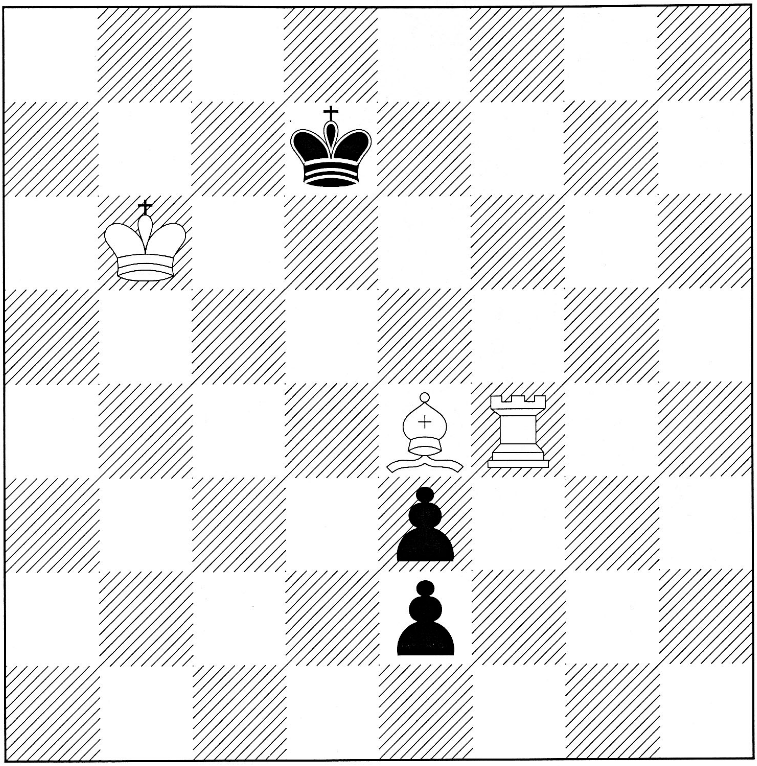
dus $3^{m/2} + 1$ ook.

Dan moet $m/2 = 1$.

Dat geeft het tweetal **8**, **9**.

R. Réti & H. Rinck (1928)

Zwart



Wit

Wit speelt en wint